Université de Bourgogne, U.F.R. des Sciences et Techniques, année 2018-2019.
L1, Mathématiques pour l'Informatique et l'Électronique II - MaIE2A.

Contrôle continu du 28 février 2019, 8h-10h.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Soit $(u_n)_{n\geqslant 0}$ la suite de terme général $u_n = \frac{n}{n+1}$;

a. montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est bornée ;

b. montrer que $(u_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

2. Calculer les limites des suites suivantes lorsque $n \to +\infty$ en donnant toutes les étapes des calculs :

a. $\left(\left(\frac{3}{\pi}\right)^n\right)_{n\geqslant 0}$

b. $\left(-\left(\frac{\pi}{3}\right)^n\right)_{n\geqslant 0}$

c. $\left(\frac{3n^5+5n^2+67n}{9n^5+n^3}\right)_{n\geqslant 1}$

d. $\left(\frac{n+\sin(n)}{n\sin(\frac{1}{n})+\sqrt{3n^2+2}}\right)_{n\geqslant 1}$

e. $\left(\sqrt{n+1}-\sqrt{n}\right)_{n\geqslant 0}$

3. a. En utilisant les quantificateurs donner la signification (c.-à-d. la définition) de l'expression suivante :

$$\lim_{n\to+\infty} n^2 = +\infty. \tag{1}$$

b. Vérifier que l'expression (1) est vraie.

4. Montrer que la suite suivante n'admet pas de limite en utilisant les suites extraites (énoncer le théorème approprié) :

$$\left(\left(-\frac{\pi}{3}\right)^n\right)_{n\geqslant 0}$$

5. Soit $(s_n)_{n\geqslant 0}$ la suite définie par la relation de récurrence

$$s_{n+2} = 6s_{n+1} - 9s_n,$$

et les conditions initiales $s_0 = 1$, $s_1 = 6$. Donner le terme général de la suite.

6. On considère la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation de récurrence :

$$x_{n+1} = \sqrt{2x_n + 3}, \qquad n \geqslant 0 \tag{2}$$

avec la condition initiale $x_0 = 0$.

a. Calculer les premiers trois termes de la suite.

b. En supposant que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente, quelle est sa limite et pourquoi ?

c. Montrer que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est croissante.

d. Montrer que l'intervalle $[0, 3]$ est stable, et conclure que la suite $(x_n)_{n\geqslant 0}$ est convergente.

7. a. Calculer la somme de la série suivante :

$$\sum_{n=0}^{+\infty} \frac{1}{3^n}. \tag{3}$$

b. Montrer que la série suivante est divergente :

$$\sum_{n=1}^{\infty} e^{\frac{1}{n}}.$$

c. Soit $\sum_{n=0}^{+\infty} u_n$ une suite à termes positifs tel que $u_n \leqslant 2^{-n}$ pour tout $n \geqslant 0$. Montrer qu'elle est convergente.