Contrôle continu du 1 mars 2018.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. Calculer :

1. $\sum_{k=1}^{30}(4k-31)$,

$$= 4\sum_{k=1}^{30} k - 31\sum_{k=1}^{30} 1 = 4\frac{30\cdot 31}{2} - 30\cdot 31 = 30\cdot 31.$$

2. $\sum_{k=2}^{n} 3^{-k}$.

$$(1-3^{-1})(3^{-2}+\cdots+3^{-n}) = 3^{-2} - 3^{-n-1}$$

donc

$$\sum_{k=2}^{n} 3^{-k} = \frac{3^{-2}-3^{-n-1}}{1-3^{-1}}.$$

Exercice 2. Calculer les limites suivantes (on donnera toutes les étapes des calculs) :

1. $\lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\sum_{k=1}^{n} k$,

$$= \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{n^2}\frac{n(n+1)}{2} = \lim \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{n}\right) = \frac{1}{2}.$$

2. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n}$,

$$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin n}{n} \leqslant \frac{1}{n} \qquad \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\sin n}{n} = 0.$$

par le théorème des gendarmes.

3. $\lim_{n\to+\infty}(\sqrt{n+1}-\sqrt{n})$,

$$= \lim \frac{n+1-n}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = \lim \frac{1}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n}} = 0.$$

4. $\lim_{n\to+\infty}(1-2n\sin(1/n))$,

$$= \lim\left(1-2\frac{\sin\frac{1}{n}}{\frac{1}{n}}\right) = -1.$$

puisque la fonction $\frac{\sin x}{x}$ est continue en 0 et vaut 1.

Cours L1 MaIE2A, U.F.R. des Sciences et Techniques, Université de Bourgogne.

5. $\lim_{n\to+\infty} \left(1+\frac{1}{13n}\right)^{7n}$,

$$= \lim \exp\left(7n\ln(1+\frac{1}{13n})\right) = \lim \exp\left(\frac{\ln(1+\frac{1}{13n})}{\frac{1}{7n}}\right) = e^{\frac{7}{3}}$$

puisque $\frac{\ln(1+\frac{x}{3})}{\frac{x}{7}}$, en utilisant l'Hôpital, tend vers $\frac{7}{3}$ si x tend vers 0.

6. $\lim_{n\to+\infty} \frac{3n^5+n^2+67n}{29n^5+65n^3}$,

$$= \lim \frac{3+n^{-3}+67n^{-4}}{29+65n^{-2}} = \frac{3}{29}.$$

7. $\lim_{n\to+\infty} \frac{(13)^{n+1}+(11)^{n+1}}{(13)^n+(11)^n}$.

$$= \lim \frac{13+\frac{(11)^{n+1}}{(13)^n}}{1+\left(\frac{11}{13}\right)^n} = 13.$$

Exercice 3. Montrer que les suites suivantes sont divergentes :

1. $u_n = \frac{1}{n} + 5(-1)^n$,
   La sous-suite $u_{2n} = 5 + \frac{1}{2n}$ tend vers 5, et la sous-suite $u_{2n+1} = -5 + \frac{1}{2n+1}$ tend vers -5. Tout sous-suites d'une suite convergente convergent vers la même limite, donc u_n ne converge pas.
2. $u_n = e^n \cos \frac{\pi n}{3}$.
   Il suffit de considerer la sous-suite $u_{6n} = e^{6n}$ qui diverge. Donc u_n diverge.

Exercice 4. On considère la suite $(s_n)_{n\geqslant 0}$ définie par la relation de récurrence :

$$s_{n+1} = (7s_n - 6)^{1/3}.$$

1. Montrer que la fonction $f(x) = (7x-6)^{1/3}$ définie sur l'intervalle $[1, +\infty[$ est continue et croissante, trouver les points fixes de $f(x)$, et dire où la fonction $f(x)$ est supérieure ou inférieure à x.
   Indication : les racines du polynôme $x^3 - 7x + 6$ sont $1, 2, -3$.
   $f(x)$ est un fonction continue pour $7x - 6 > 0$, donc aussi pour $x \geqslant 1 > \frac{6}{7}$. On a $f'(x) = \frac{7}{3}(7x-6)^{-\frac{2}{3}} > 0$ si $x \in [1, +\infty[$, donc $f(x)$ est croissante. On a que $f(x) = x$ ssi $7x - 6 = x^3$, donc les points fixes sont les racines $1, 2$ su polynôme $x^3 - 7x + 6$ dans $[1 + \infty[$. $f(x) > x$ ssi $7x - 6 > x^3$ ssi $(x-1)(x-2)(x+3) = x^3 - 7x + 6 > 0$. Dont $f(x) > x$ pour $1 < x < 2$, $f(x) < x$ pour $x > 2$.
2. Pour quelles valeurs de $s_0 \in [1, +\infty[$ la suite (s_n) est-elle croissante, décroissante, constante ?
   Si $s_0 = 1$ alors $s_n = 1$, $n \geqslant 0$. Si $s_0 = 2$ alors $s_n = 2$, $n \geqslant 0$. Si $1 < s_0 < 2$, alors s_n est croissante. Si $2 < s_0$ alors s_n est décr.

3. Montrer que l'intervalle $[1,2]$ est stable par $f(x)$ et trouver la limite de (s_n) en fonction de $s_0 \in [1,2]$.
Puisque $f(x)$ est continue et croissante, l'image de $[1,2]$ est $[f(1), f(2)] = [1,2]$, donc $[1,2]$ est stable. Alors s_n est monotone et bornée, donc elle doit converger vers un point fixe. Donc la limite est 1 si $s_0 = 1$; si $1 < s_0 \leqslant 2$, comme la suite est croissante, la limite est 2.
4. Montrer que l'intervalle $[2, +\infty[$ est stable par $f(x)$ et trouver la limite de (s_n) en fonction de $s_0 \in [2, +\infty[$.
Puisque $f(x)$ est croissante, et $f(2) = 2$, alors l'image de $[2, +\infty[$ est contenue dans $[2, +\infty[$, dont cet intervalle est stable. Comme la suite s_n est décroissante, elle doit converger vers le point fixe 2.

Exercice 5. Considérer la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$ définie par

$$u_{n+2} = 6u_{n+1} - 9u_n, \qquad u_0 = 0, \quad u_1 = 3.$$

1. Donner l'expression du terme de rang n de la suite $(u_n)_{n \geqslant 0}$. Écrire les étapes des calculs.
On va substituer $u_n = r^n$ et on trouve l'equation caractéristique : $r^2 - 6r + 9 = (r-3)^2 = 0$, qui a la racine double $r = 3$. Le terme générale de la suite est donc $u_n = 3^n(\lambda n + \mu)$ pour deux constantes λ, μ. En imposant $u_0 = \mu = 0$ et $u_1 = 3(\lambda + \mu) = 3$ on trouve $\mu = 0$ et $\lambda = 3$, donc $u_n = n3^n$.
2. Quelle est la limite du rapport $\frac{u_{n+1}}{u_n}$ lorsque $n \to +\infty$?

$$\frac{u_{n+1}}{u_n} = \frac{(n+1)3^{n+1}}{n3^n} = \frac{n+1}{n}3 = 3(1 + \frac{1}{n}) \to 3.$$

Exercice 6.

1. Calculer la somme téléscopique suivante :

$$\sum_{n=1}^{\infty} \ln \frac{(n+2)n}{(n+1)^2} = \sum_{n=1}^{\infty} \left[\ln \frac{(n+2)}{(n+1)} - \ln \frac{(n+1)}{n} \right].$$

$$= \left(\lim_{n \to +\infty} \ln \frac{n+2}{n+1} \right) - \ln \frac{2}{1} = \left(\lim_{n \to +\infty} \ln \left(1 + \frac{1}{n+1} \right) \right) - \ln \frac{2}{1} = -\ln 2$$

2. Montrer que la série suivante est divergente :

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{n}{n+1}.$$

Si une série de terme générale a_n converge, alors a_n tend vers 0. Dans ce cas $\lim_{n \to +\infty} \frac{n}{n+1} = 1$, donc la série diverge.

3. Soit $(S_n)_{n\geqslant 0}$ la suite des sommes partielles de la série à termes positifs $(u_n)_{n\geqslant 0}$. Expliquer pourquoi la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge si (S_n) est majorée.
   On a $S_n = \sum_{k=0}^{n} u_k$, $u_k \geqslant 0$. On trouve que $S_{n+1} - S_n = u_{n+1} \geqslant 0$, donc la suite S_n est croissante. Une suite croissante et majorée est convergente, donc la série $\sum_{n=0}^{\infty} u_n$ converge.