Université de Bourgogne, U.F.R. des Sciences et Techniques, année 2017-2018.
L1, Mathématiques pour l'Informatique et l'Électronique II - MaIE2A.

Examen du 17 mai 2018, 9h-11h, session 1.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. Calculer les limites suivantes, en justifiant vos réponses :

1. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{\pi}{3}\right)^n$
   Suite géométrique avec raison $\pi/3 > 1$ donc tends vers $+\infty$.
2. $\lim_{n\to+\infty} \left(\frac{3}{\pi}\right)^n$
   Suite géométrique avec raison $-1 < 3/\pi < 1$ donc tends vers 0.
3. $\lim_{n\to+\infty} \left(-\frac{\pi}{3}\right)^n$
   Suite géométrique avec raison $\pi/3 < -1$ donc elle n'a pas de limite.
4. $\lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n}$
   Par le théorème des gendarmes
   $$-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\cos n}{n} \leqslant \frac{1}{n} \quad \Longrightarrow \lim_{n\to+\infty} \frac{\cos n}{n} = 0.$$
5. $\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right)$
   On a la forme indéterminée $\infty - \infty$. Si on divise et multiplie par $\sqrt{n^2+1} + n$ on trouve
   $$\lim_{n\to+\infty} \left(\sqrt{n^2+1} - n\right) = \lim_{n\to+\infty} \frac{1}{\sqrt{n^2+1}+n} = 0.$$

Exercice 2. On considère la relation de récurrence

$$2s_{n+2} = 3s_{n+1} - s_n. \tag{1}$$

1. Trouver deux suites géométriques qui satisfont à (1).
   Soit $s_n = r^n$, on trouve l'equation caractéristique $2r^2 = 3r - 1$, avec racines 1, $\frac{1}{2}$. Donc le deux suites sont $s_n = 1$ et $s_n = 2^{-n}$.
2. Donner le terme général de la suite (s_n) définie par la relation de récurrence (1) et les conditions initiales $s_0 = \alpha + 2$, $s_1 = \alpha + 1$, où $\alpha \in \mathbb{R}$.
   On a $s_n = \lambda 2^{-n} + \mu$. Imposant les conditions initiales $s_0 = \lambda + \mu = \alpha + 2$ et $s_1 = \frac{1}{2}\lambda + \mu = \alpha + 1$ on trouve $\lambda = 2$, $\mu = \alpha$, donc la suite est $s_n = 2^{-n+1} + \alpha$.

Exercice 3. 1. Calculer $\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k}$, puis $\sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k}$.

$$\sum_{k=0}^{n} \frac{1}{2^k} = \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-(1/2)} \quad \text{et} \quad \sum_{k=0}^{\infty} \frac{1}{2^k} = \lim_{n\to+\infty} \frac{1-(1/2)^{n+1}}{1-(1/2)} = 2.$$

2. Montrer que la série $\sum_{n=0}^{\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right)$ est divergente.

   Comme le terme général d'une suite convergente tends vers zero, et dans ce cas

$$\lim_{n\to+\infty} \sin\left(\frac{\pi}{2}+\frac{1}{n}\right) = \sin\frac{\pi}{2} = 1,$$

   la série n'est pas convergente.

Exercice 4. Utiliser les opérations élémentaires sur les équations du système suivant pour le transformer en un système équivalent échelonné réduit. Trouver l'ensemble des solutions.

$$\begin{cases} x+2y+3z & = 1 \\ x+z & = 2 \\ 2y+2z & = -1 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x+z & = 2 \\ x+2y+3z & = 1 \\ 2y+2z & = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+z & = 2 \\ 2y+2z & = -1 \\ 2y+2z & = -1 \end{cases} \sim \begin{cases} x+z & = 2 \\ y+z & = -1/2 \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{ \begin{pmatrix} 2-z \\ -\frac{1}{2}-z \\ z \end{pmatrix} \mid z \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^3$.

Exercice 5. Calculer l'inverse de la matrice suivante :

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 & 0 \\ 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 \end{pmatrix}$$

$$\left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 1 & 1 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 1 & 0 \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 1 & -1 & 0 & 1 \end{array}\right)$$

Exercice 6. 1. Montrer que l'application suivante de $\mathbb{R}^3$ dans $\mathbb{R}^3$ est linéaire et écrire la matrice associée (dans la base canonique de $\mathbb{R}^3$) :

$$f : \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} x_2+2x_3 \\ x_1+2x_3 \\ x_2. \end{pmatrix}$$

$$f(\lambda u+\mu v) = f\begin{pmatrix}\lambda u_1+\mu v_1\\ \lambda u_2+\mu v_2\\ \lambda u_3+\mu v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\lambda u_2+\mu v_2+2(\lambda u_3+\mu v_3)\\ \lambda u_1+\mu v_1+2(\lambda u_3+\mu v_3)\\ \lambda u_2+\mu v_2\end{pmatrix} = \lambda f(u)+\mu f(v).$$

$$A_f = \begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}$$

2. Écrire la matrice associée à $f\circ f$.

$$A_{f\circ f} = A_f\cdot A_f = \begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}0&1&2\\1&0&2\\0&1&0\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}1&2&2\\0&3&2\\1&0&2\end{pmatrix}$$

Exercice 7. Pour chacun des sous-ensembles suivants de $\mathbb{R}^3$, indiquer s'il est ou non un sous-espace vectoriel. Justifier vos réponses.

1. $V_1 = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \text{ tels que } x_1+x_2=0,\ x_2+2x_3=0\right\}$

   Si $u,v\in V_1$, alors

   $$w := \lambda u+\mu v = \begin{pmatrix}\lambda u_1+\mu v_1\\ \lambda u_2+\mu v_2\\ \lambda u_3+\mu v_3\end{pmatrix}$$

   et, comme $w_1+w_2 = \lambda(u_1+u_2)+\mu(v_1+v_2) = \lambda\cdot 0+\mu\cdot 0 = 0$, $w_2+2w_3 = \lambda(u_2+2u_3)+\mu(v_2+2v_3) = 0$, on trouve que $w\in V_1$. Donc V_1 est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

2. $V_2 = \left\{\begin{pmatrix}x_1\\x_2\\x_3\end{pmatrix}\in\mathbb{R}^3 \text{ tels que } x_2=1\right\}$

   $$u+v = \begin{pmatrix}u_1\\1\\u_3\end{pmatrix}+\begin{pmatrix}v_1\\1\\v_3\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}u_1+v_1\\2\\u_3+v_3\end{pmatrix}\notin V_2,$$

   donc V_2 n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.