Université de Bourgogne, U.F.R. des Sciences et Techniques, année 2017-2018.
L1, Mathématiques pour l'Informatique et l'Électronique II - MaIE2A.

Examen du 21 juin 2018, 8h-10h, session 2.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

Exercice 1.

1. Déterminer si la suite $\left(\frac{n+1}{n}\right)_{n\geqslant 1}$ est monotone ou non.
   On a $u_n = \frac{n+1}{n} = 1 + \frac{1}{n}$; comme $n \geqslant 1$, et $n+1 > n$, donc $\frac{1}{n} > \frac{1}{n+1}$, et $u_n > u_{n+1}$, la suite est strictement décroissante.
2. Trouver la limite : $\lim_{n\to+\infty} \frac{n+2n^3+3n^5}{4n+5n^4+6n^5}$.
   $= \frac{1}{2}$.
3. Trouver la limite : $\lim_{n\to+\infty} \frac{7^{n+1}}{8^n}$.
   $= 7 \lim_{n\to+\infty} \left(\frac{7}{8}\right)^n = 0$.
4. Trouver la limite : $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2 n}{n}$.
   $-\frac{1}{n} \leqslant \frac{\sin^2 n}{n} \leqslant \frac{1}{n}$, donc $\lim_{n\to+\infty} \frac{\sin^2 n}{n} = 0$ par le théorème des gendarmes.

Exercice 2. Calculer les sommes suivantes :

1. $\sum_{k=1}^{19}(2k-20)$.
   $= 2\sum_{k=1}^{19} k - 20\sum_{k=1}^{19} 1 = 2\frac{19\cdot 20}{2} - 20\cdot 19 = 0.$
2. $\sum_{k=0}^{n} 2^{3k+2}$.
   $= 4\sum_{k=0}^{n}(2^3)^k = 4\frac{1-8^{n+1}}{1-8}$.
3. $\sum_{k=0}^{\infty} 2^{-3k+2}$.
   $= 4\sum_{k=0}^{\infty}(2^{-3})^k = \frac{4}{1-2^{-3}} = \frac{32}{7}$.

Exercice 3. On considère la relation de récurrence

$$s_{n+2} = 4s_{n+1} - 3s_n. \qquad (1)$$

1. Trouver deux suites géométriques qui satisfont à (1).
   Soit $s_n = r^n$, on trouve l'equation caractéristique $r^2 = 4r - 3$, avec racines 1, 3. Donc le deux suites sont $s_n = 1$ et $s_n = 3^n$.
2. Donner le terme général de la suite (s_n) définie par la relation de récurrence (1) et les conditions $s_0 = s_1 - 2$, $s_2 = 9$.
   On a $s_n = \lambda 3^n + \mu$. Imposant les conditions initiales $s_0 = \lambda + \mu = s_1 - 2 = 3\lambda + \mu - 2$ et $s_2 = 9\lambda + \mu = 9$ on trouve $\lambda = 1$, $\mu = 0$, donc la suite est $s_n = 3^n$.

Exercice 4. En faisant des opérations élémentaires sur les équations du système ci-dessous, le transformer en un système équivalent échelonné réduit. Donner alors l'ensemble de ses solutions.

$$\begin{cases} x + 2y + z + w & = 5 \\ x + w & = 1 \\ 4x - 2y - z + 4w & = 0 \end{cases}$$

$$\sim \begin{cases} x + w & = 1 \\ 2y + z & = 4 \\ -2y - z & = -4 \end{cases} \sim \begin{cases} x + w & = 1 \\ y + \frac{z}{2} & = 2 \end{cases}$$

donc l'ensemble des solutions est $S = \left\{ \begin{pmatrix} 1 - w \\ 2 - \frac{z}{2} \\ z \\ w \end{pmatrix} \mid z, w \in \mathbb{R} \right\} \subset \mathbb{R}^4$.

Exercice 5. Montrer que les matrices A et B commutent :

$$A = \begin{pmatrix} -2 & 2 \\ 3 & 1 \end{pmatrix}, \quad B = \begin{pmatrix} 1 & 2 \\ 3 & 4 \end{pmatrix}.$$

$AB = \begin{pmatrix} 4 & 4 \\ 6 & 10 \end{pmatrix} = BA$.

Exercice 6. Calculer l'inverse A^{-1} de la matrice suivante :

$$A = \begin{pmatrix} 2 & 1 & 0 \\ 0 & 0 & 2 \\ 2 & 0 & 0 \end{pmatrix}.$$

Vérifier, en calculant AA^{-1}.

$$\sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 2 & 0 & 1 & 0 \\ 2 & 0 & 0 & 0 & 0 & 1 \end{array}\right) \sim \left(\begin{array}{ccc|ccc} 1 & 0 & 0 & 0 & 0 & \frac{1}{2} \\ 0 & 1 & 0 & 1 & 0 & -1 \\ 0 & 0 & 1 & 0 & \frac{1}{2} & 0 \end{array}\right)$$

Exercice 7. Écrire l'application linéaire $f : \mathbb{R}^2 \to \mathbb{R}^2$ donnée par la réflexion par rapport à l'axe des ordonnées du plan. Écrire la matrice associée.

$$f : \begin{pmatrix} x \\ y \end{pmatrix} \mapsto \begin{pmatrix} -x \\ y \end{pmatrix}, \tag{2}$$

la matrice associée est donc $\begin{pmatrix} -1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$.

Exercice 8. Indiquer si le sous-ensemble V de $\mathbb{R}^3$ est ou non un sous-espace vectoriel. Justifier votre réponse.

$$V = \left\{ \begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \\ x_3 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^3 \text{ tels que } x_1 + x_2 + 1 = 0 \right\}$$

Le vecteur $v = \begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \in V$, mais $2v = \begin{pmatrix} -2 \\ 0 \\ 0 \end{pmatrix} \notin V$, donc V n'est pas un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^3$.

Exercice 9. Soit $S \subset \mathbb{R}^4$ l'ensemble des solutions du système linéaire homogène

$$\begin{cases} x_1 + x_3 - x_4 = 0 \\ x_2 + x_4 = 0 \end{cases}.$$

Montrer que S est un sous-espace vectoriel de $\mathbb{R}^4$. Écrire des générateurs pour S.

$S = \left\{ \begin{pmatrix} -x_3 + x_4 \\ -x_4 \\ x_3 \\ x_4 \end{pmatrix} \in \mathbb{R}^4 \text{ tels que } x_3, x_4 \in \mathbb{R} \right\}$. On peut écrire que $u \in S$ ssi $Au = 0$, où $A = \begin{pmatrix} 1 & 0 & 1 & -1 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{pmatrix}$ est la matrice associée. Si $u, v \in S$, $\lambda, \mu \in \mathbb{R}$, alors $A(\lambda u + \mu v) = 0$ donc $\lambda u + \mu v \in S$ donc S est un sous-espace vectoriel. Générateurs :

$$\begin{pmatrix} -1 \\ 0 \\ 1 \\ 0 \end{pmatrix}, \quad \begin{pmatrix} 1 \\ -1 \\ 0 \\ 1 \end{pmatrix}. \tag{3}$$