
Contrôle continu du 25 octobre 2018, 8h-10h.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

Exercice 1. Soient f et g des fonctions définies sur $\mathbb{R}$. Montrer que si f est une fonction impaire et g est une fonction paire, alors $f^3 g$ est une fonction impaire.

$f^3(-x)g(-x) = (-f(x))^3 g(x) = -f^3(x)g(x)$

Exercice 2. Montrer que la fonction $f(x) = \frac{x^2}{1+x^4}$ définie su $\mathbb{R}$ est majorée par $\frac{1}{2}$ et minorée par $-\frac{1}{2}$.

$\pm\frac{x^2}{1+x^4} \leqslant \frac{1}{2} \iff \pm 2x^2 \leqslant 1 + x^4 \iff (x^2 \mp 1)^2 \geqslant 0$

Exercice 3. En utilisant la définition de limite, montrer que :

$$\lim_{x\to 2} x^2 = 4.$$

Soit $\epsilon > 0$. On a que $|x^2 - 4| \leqslant |x+2||x-2| \leqslant (|x-2|+4)|x-2|$. Si $|x-2| \leqslant \delta := \min(\frac{\epsilon}{5}, 1)$, alors on a que $|x^2 - 4| \leqslant \epsilon$.

Exercice 4. Calculer les limites suivantes :

1. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x}$, $= \lim_{x\to 0} \frac{-\sin x}{\cos x} = 0$.
2. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x+x^2)-x}{\cos(2x)-1}$. $= \lim \frac{1}{1+x+x^2}\frac{x-x^2}{-2\sin(2x)} = \lim \frac{1}{-4\cos 2x} = -\frac{1}{4}$.

Exercice 5. Calculer $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x}$ en utilisant le théorème des gendarmes.

$\frac{|\sin x|}{|x|} \leqslant \frac{1}{|x|}$ donc $\lim_{x\to+\infty} \frac{\sin x}{x} = 0$.

Exercice 6. En utilisant la formule pour la dérivée de la fonction réciproque calculer la dérivée de $\arctan(x)$. *Suggestion : dériver* $\arctan(\tan(x)) = x$.

$\arctan'(x) = \frac{1}{\tan'(\arctan(x))} = \cos^2(\arctan x) = \frac{1}{1+\tan^2(\arctan x)} = \frac{1}{1+x^2}$.

Exercice 7. On considère la fonction $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$.

1. Déterminer le domaine de définition maximal de f et calculer les limites au bord du domaine de définition et en $\pm\infty$.
   Domaine de définition : $\mathbb{R}\setminus\{0\}$. $\lim_{x\to 0^\pm} f(x) = +\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} f(x) = \pm\infty$.
2. Calculer la dérivée et trouver tous les points critiques de f.
   $f'(x) = 1 - 2x^{-3} = \frac{x^3-2}{x^3}$. Point critique : $x = \sqrt[3]{2}$.
3. Étudier le signe de la dérivée, trouver le sens de variation et les extrema de f.
   $f'(x) > 0 \iff x < 0$ ou $x > \sqrt[3]{2}$, croissante.
   $f'(x) < 0 \iff x \in]0, \sqrt[3]{2}[$, décroissante.
   Minimum : $x = \sqrt[3]{2}$.