Examen du 9 janvier 2019, 16h30-18h30.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

Exercice 1
On considère la fonction
$$f(x) = \sqrt{x^2 + 6x + 5}.$$

a. Déterminer le domaine de définition maximal de f.
b. Calculer les limites au bord du domaine de définition et $\pm\infty$.
c. Calculer la dérivée de f.
d. Trouver tous les points critiques de f.
e. Étudier le signe de la dérivée, trouver le sens de variation et les extrema de f.

Exercice 2
1) Calculer la dérivée de la fonction définie sur $]1, +\infty[$ par $f(x) = \log \dfrac{x+1}{x-1}$

2) En déduire la valeur de $\displaystyle\int_2^3 \frac{dx}{x^2 - 1}$

Exercice 3
Donner une primitive de :
$$\text{a) } x^\alpha,\ \text{avec } \alpha \neq -1, \qquad \text{b) } \cos x + \sin x \qquad \text{c) } x\,\mathrm{e}^{x^2+1}$$

Exercice 4
Calculer :
$$\text{a) } \int_{-2}^{2} \left(x^5 + x^2\right)\, dx, \qquad \text{b) } \int_0^1 x \sin(x)\, dx.$$

Exercice 5
Calculer la limite suivante en utilisant le théorème de L'Hôpital :
$$\lim_{x \to 1} \frac{\sin(1-x)}{\ln x}.$$

Exercice 6
1) Calculer les limites en 0 de :
$$\text{a) } \frac{x - \sin x}{x} \qquad \text{b) } \frac{x - \sin x}{x^2} \qquad \text{c) } \frac{x - \sin x}{x^3}$$

2) Quelles sont les égalités justes parmi les suivantes, quand x tend vers 0,
$$\text{a) } x - \sin x = \mathrm{o}(x) \qquad \text{b) } x - \sin x = \mathrm{o}(x^2) \qquad \text{c) } x - \sin x = \mathrm{o}(x^3)$$

Exercice 7
En utilisant $\mathrm{e}^x = 1 + x + \frac{1}{2}x^2 + \frac{1}{6}x^3 + \mathrm{o}(x^3)$ quand x tend vers 0, calculer
$$\lim_{x \to 0} \frac{(1 - \mathrm{e}^x)(1 - \mathrm{e}^{-x})}{x^2}.$$

Exercice 8
Calculer les deux premiers termes non nuls du polynôme de Taylor en 0 de la fonction définie par :
$$f(x) = (\sin x)^2.$$