Ensembles des nombres réels, rationnels, entiers, naturels. Droite réelle. Langage de la logique et des ensembles. Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale périodique. Démonstration de l'irrationalité de la racine carrée de deux. Démonstrations par contraposée et par l'absurde. Intervalles. Propriétés d'ordre des réels. Inéquations. Valeur absolue. Produit et plan cartésien. L'équation de la droite. Distance entre deux points. Polynômes et fonctions rationnelles. Division de polynômes. Trigonométrie et fonctions circulaires.

1. Dire si les nombres suivants sont naturels, entiers, rationnels ou réels :
a. $0,125453$ b. -27 c. $-27,1$ d. $\sqrt{2} \simeq 1,4142...$ e. $\sqrt{4}$ f. $\pi \simeq 3,1415...$
g. $0,121212...$ (périodique) h. $e \simeq 2,7182...$ (constante de Néper) i. $1,231111...$
Écrire les fractions qui correspondent aux nombres rationnels.

2. Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$.

3. Exprimer les symbols suivants en français : $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\forall$, $\exists$, $\in$, $\subset$, $\varnothing$, $\cup$, $\cap$.

4. Écrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes :

a. Pour tout nombre réel son carré est strictement positif.

b. Il existe un nombre naturel n tel que n^4 soit plus grand que 100.

Puis écrire la négation de chaque phrase. Dire si chaque assertion est vraie ou fausse.

Solution. 1. $\forall x \in \mathbb{R},\ x^2 > 0$. La négation dévient : $\exists x \in \mathbb{R},\ x^2 \leqslant 0$. La prèmiere assertion est fausse, donc sa négation est vraie. $\square$

$$\boxed{ax^2+bx+c=0 \quad \Longleftrightarrow \quad x=\frac{-b\pm\sqrt{b^2-4ac}}{2a}}$$

5. Rappeler les identités remarquables suivantes :
a. $(a-b)^2$, b. a^2-b^2, c. $(a+b)^2$, d. $(a+b)^3$, e. a^3+b^3, f. a^3-b^3.

$$\boxed{a<b,\ c>0 \Longrightarrow ac<bc, \qquad a<b,\ c<0 \Longrightarrow ac>bc}$$

6. Résoudre les inéquations suivantes. Exprimer le résultat sous la forme de intervalle.
a. $2x-1>x+3$, b. $-\frac{x}{3} \geqslant 2x-1$, c. $\frac{2}{x-1} \geqslant 5$, d. $\frac{3}{x-1} < -\frac{2}{x}$.

7. Résoudre les systèmes des inéquations suivants :
a. $3 \leqslant 2x+1 \leqslant 5$, b. $3x-1 < 5x+3 \leqslant 2x+15$.

8. Résoudre les inéquations quadratiques suivantes :
a. $x^2-5x+6<0$, b. $2x^2+1>4x$, c. $x^2-2x \leqslant 0$.

$$\boxed{|x| = x\ \mathrm{sgn}(x), \qquad |x+y| \leqslant |x|+|y|}$$

9. Résoudre les équations suivantes :
a. $|x|=2$, b. $|x-3|=2$, c. $|x-2|=|x+2|$, d. $|x-7|=x-3$,
e. $|x-1|+|x-7|=3$.

10. Résoudre les inéquations suivantes :
a. $|x| \leqslant 3$, b. $|x-3| \leqslant 5$, c. $|x+4| \geqslant 1$, d. $|x+3| \leqslant 2-x$.

11. Montrer que $||x|-|y|| \leqslant |x-y|$, à partir de l'inégalité triangulaire.

12. Écrire l'équation de la droite dans le plan cartésien qui passe par les points de cordonnées $(1,0)$ et $(2,3)$. Trouver le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite.

13. Calculer la distance entre les points $(3,-3)$ et $(-1,2)$ du plan cartésien.

$$\boxed{A_m/B_n = Q_{m-n} + R_k/B_n, \qquad k<n}$$

14. Trouver les racines des polynômes suivants :
a. $x^2-3x-10$, b. $x^4+6x^3+9x^2$, c. x^3-x^2-4x+4.

15. Donner le quotient et le reste des divisions suivantes :
a. $\frac{x^3-1}{x^2-2}$, b. $\frac{x^2}{x^2+5x+3}$.

16. Factoriser les expressions suivantes :
a. x^3+x^2-3x+1, b. x^4+x^3-x-1.

$$\boxed{\begin{array}{ll} \cos(x+y)=\cos(x)\cos(y)-\sin(x)\sin(y) & \cos^2(x)+\sin^2(x)=1 \\ \sin(x+y)=\sin(x)\cos(y)+\cos(x)\sin(y) & \tan(x)=\dfrac{\sin(x)}{\cos(x)} \end{array}}$$

17. Montrer les identités trigonométriques suivantes :
a. $\cos(x-y)=\cos(x)\cos(y)+\sin(x)\sin(y)$, b. $\cos(\pi-x)=-\cos(x)$,
c. $\sin(\frac{\pi}{2}-x)=\cos(x)$, d. $\sin(2x)=2\sin(x)\cos(x)$, e. $\cos(2x)=1-2\sin^2(x)$,
f. $\tan(x+y)=\frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$.

18. Résoudre les équations trigonométriques suivantes :
a. $\sin(3x)=\frac{1}{2}$, b. $\sin^2(x)+2\sin(x)-3=0$, c. $2(\cos^2(x)-\sin^2(x))=1$,
d. $\sin(2x)+\sqrt{3}\cos(2x)=0$, e. $\cos(x)-\cos(2x)=\sin(3x)$.