2 - Les fonctions, la limite et la continuité **Feuille de TD**

Définition de fonction. Graphe. Somme, produit, quotient des fonctions. Fonctions bornées, monotones, paires, impaires, périodiques.

19. Montrer que la fonction $f(x) = -1 + \frac{2x^2}{x^2+1}$ est bornée, car majorée par 1 et minorée par -1. Montrer qu'elle est aussi majorée par la fonction $g(x) = x$ sur $[0, +\infty[$.

20. Soit $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Montrer que $|f(x)|$ est majorée par $\frac{1}{2}$.

21. La fonction $\frac{1}{x}$ est-elle monotone sur $]-\infty, 0[$? Et sur $]0, +\infty[$? Et sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

22. Montrer que la fonction x^3 est strictement croissante sur $\mathbb{R}$.

Suggestion. Utiliser une identité remarquable pour $a^3 - b^3$ et observer que, en complétant le carré, on a $a^2 + ab + b^2 = (a + \frac{b}{2})^2 + \frac{3}{4}b^2$.

23. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions paires. Que peut-on dire sur la parité de la somme $f + g$, du produit fg, et de la composée $f \circ g$? Et si f, g sont impaires ? Et si l'une est paire et l'autre impaire ?

Limite finie dans un point. Unicité de la limite. Limites à gauche et à droite. Propriétés des limites par rapport aux opérations. Limites des polynômes et des fonctions rationnelles. Limites infinies. Formes indéterminées. Limites en l'infini. Inégalités et limites. Théorème des gendarmes.

$x_0 \in I =]a, b[$, $U = I \setminus \{x_0\}$, $f : U \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \ \Big| \ \forall x \in U, \ 0 < |x - x_0| < \delta \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

24. Montrer, en utilisant la définition de limite, que :
a. $\lim_{x\to a} f(x) = c$, où $f(x) = c$ est une fonction constante, b. $\lim_{x\to a} x = a$,
c. $\lim_{x\to 2} x^3 = 8$, d. $\lim_{x\to 1} x(2 - x) = 1$, e. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{x} = 1$.

Solution. c. Soit $\epsilon > 0$. If faut trouver $\delta > 0$ tel que : pour tout x tel que $0 < |x-2| < \delta$ alors $|x^3 - 8| < \epsilon$. On va essayer de majorer $|x^3 - 8|$ avec $|x - 2|$ fois une constante. On peut écrire $|x^3 - 8| = |x - 2||x^2 + 2x + 4|$. Si on prend x tel que $0 < |x - 2| < 1$ alors le deuxième facteur est majoré par une constante a pas zero (un polynôme sur un intervalle borné est borné). Si on prend x tel que $0 < |x - 2| < \frac{\epsilon}{a}$ alors on a que le premier facteur est majoré par $\frac{\epsilon}{a}$. Si on prend $\delta = \min(1, \epsilon/a)$ alors on a que pour tout x tel que $0 < |x - 2| < \delta$ les deux majorations sont valides, donc :

$$|x^3 - 8| = |x - 2||x^2 + 2x + 4| < \frac{\epsilon}{a}a = \epsilon.$$

□

L1, Mathématiques pour la Physique et la Chimie I - MaPC1A

25. Soit $H(x)$ la fonction de Heaviside. Montrer, en utilisant la définition de limite à droite et à gauche, que : a. $\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1$, b. $\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0$.
Conclure que la limite de $H(x)$ en 0 n'existe pas, en énonçant la proposition appropriée.

$x_0 \in I =]a, b[$, $U = I \setminus \{x_0\}$, $f : U \to \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty \iff \forall A > 0 \ \exists \delta > 0 \ \Big| \ \forall x \in U, \ 0 < |x - x_0| < \delta \implies f(x) > A$$

26. Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, et f une fonction définie sur $U = I \setminus \{x_0\}$. Écrire la définition de $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

27. Montrer, en utilisant la définition de limite, que :
a. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, b. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, c. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
Que peut-on dire de la limite de $\frac{1}{x}$ en 0 ?

$I =]a, +\infty[$, $f : I \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$:

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell \iff \forall \epsilon > 0 \ \exists B > 0 \ \Big| \ \forall x \in U, \ x > B \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$$

28. Montrer, en utilisant la définition de limite, que $\lim_{x\to +\infty} \frac{1}{x} = 0$.

29. Soient $I =]a, +\infty[$, $f : I \to \mathbb{R}$. Écrire la définition de $\lim_{x\to\infty} f(x) = +\infty$.

30. Soit $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 2, \\ 1 & \text{si } x = 2. \end{cases}$ Calculer $\lim_{x\to 2} g(x)$.

31. Soit $f(x) = \frac{|x-2|}{x^2+x-6}$. Calculer $\lim_{x\to 0^+} f(x)$, $\lim_{x\to 0^-} f(x)$ et $\lim_{x\to 0} f(x)$.

32. Calculer les limites à gauche et à droite en $+1$ et -1 de $\sqrt{1 - x^2}$.

33. Calculer les limites suivantes :
a. $\lim_{x\to 2} = \frac{1}{x^2}$, b. $\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2}$, $a \neq 0$, c. $\lim_{x\to 0} \frac{25x^3+2}{75x^7-2}$,
d. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$, e. $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-3x+1}{x-1}$, f. $\lim_{x\to 0} \frac{(t+x)^2-t^2}{x}$.

Solution. b. Pour les propriétés des limites le numérateur tend vers 0 et le dénominateur tend vers $4a^2$, qui n'est pas nul si $a \neq 0$. Donc la limite est égale à 0. □

34. Calculer les limites suivantes :
a. $\lim_{x\to 0} \tan x$, b. $\lim_{x\to 0}(\sin(2x) + x^2 \cos(5x))$, c. $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|}{x}$,
d. $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.

35. En utilisant le théorème des gendarmes, montrer que si $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

36. Calculer les limites suivantes :
a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1$, b. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x} = 2$, c. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x} = 2$,
d. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\sin x} = 2$, e. $\lim_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a} = \cos a$, f. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin x} = 5$,
g. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \frac{1}{2}$.

Solution. a. Pour $x \in]-\pi/2, \pi/2[$ on a, à partir de la définition géométrique, que $|\sin(x)| \leqslant |x| \leqslant |\tan(x)|$. Si x n'est pas nul, on peut donc écrire : $|\cos(x)| \leqslant \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leqslant 1$ et, comme toutes ces fonctions sont positives, que $\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$. Par le théorème des gendarmes on peut conclure. b. - g. Utiliser a. □

37. Calculer les limites suivantes en expliquant quel résultat sur les limites on est en train d'utiliser :
a. $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}4$, b. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$, c. $\lim_{x\to 4} \sqrt{1+\sqrt{x}}$,
d. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$, e. $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$, f. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$,
g. $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$, h. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$.

38. Calculer les limites suivantes :
a. $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$, b. $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$, c. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,
d. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, e. $\lim_{x\to -\infty} \left(3x^3-x^2+2\right)$, f. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-x+3}{3x^2+5}$,
g. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+1}{x^2+1}$, h. $\lim_{x\to \infty} \frac{5x+2}{2x^3-1}$.

Continuité en un point. Lemme du signe. Continuité et opérations élémentaires. Prolongement par continuité. Continuité sur un intervalle. Théorème des valeurs intermédiaires. Fonctions continues sur un intervalle borné et fermé.

$f :]a,b[\to \mathbb{R}$, $x_0 \in]a,b[$:

$$f \text{ continue en } x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$$
$$\iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid \forall x \in]a,b[,\ |x-x_0| < \delta \implies |f(x)-f(x_0)| < \epsilon$$

39. Montrer la continuité des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Suggestion. Utiliser l'inégalité $|\sin(x)| \leqslant |x|$ pour montrer la continuité de $\sin(x)$ en 0. Utiliser l'identité $\cos(2x) = 1-2(\sin x)^2$ pour en déduire la continuité de $\cos(x)$ en 0. Utiliser les formules pour $\sin(x+h)$ et $\cos(x+h)$ pour montrer la continuité pour tout $x \in \mathbb{R}$.

40. Déterminer le domaine de définition et de continuité des fonctions suivantes :
a. $\frac{1}{\sin(x)}$, b. $\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{2}}}$, c. $\ln(x^2+x-1)$.

41. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$. Calculer la limite de f lorsque x tend vers 0. Trouver le prolongement par continuité $\tilde{f}(x)$ de f en 0.

Suggestion. Majorer la valeur absolue de $f(x)$ et utiliser le théorème des gendarmes.

42. Étudier la continuité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)\cos(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Même question pour $g(x) = xH(x)$.

43. La fonction $\frac{x^3+8}{|x+2|}$ admet-elle un prolongement par continuité en $x = -2$?

44. Soit $f(x)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 1$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]-\delta, \delta[$, on a $f(x) > \frac{1}{2}$.

Fonctions injectives, surjectives et bijectives. Fonction réciproque. Théorème de la bijection pour une fonction continue et monotone.

45. Montrer que la fonction $g(x) = \sqrt{2x+1}$ est bijective et trouver sa fonction réciproque $g^{-1}(y)$.

46. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. a. Énoncer le théorème de la bijection. b. Montrer, en trouvant un contre-exemple, que l'hypothèse “continue” est nécessaire. c. Montrer, en trouvant un contre-exemple, que l'hypothèse “strictement monotone” est nécessaire.

47. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x$. Montrer que f est bijective, tracer le graphe de f et f^{-1}.