Dérivée en un point et sur un intervalle. Formulation equivalent avec $\epsilon(x)$. Équation de la droite tangente. Une fonction dérivable est continue. Dérivée de la somme, produit, quotient. Dérivée des fonctions puissance, sinus, cosinus, tangente. Principe de récurrence. Règle de la chaîne. Dérivée de la fonction réciproque. Dérivées successives et formule de Leibniz. La fonction logarithme et la fonction exponentielle.

$$f(x) \text{ dérivable en } x \iff \text{il existe } f'(x) = \lim_{h\to 0} \frac{f(x+h)-f(x)}{h}$$

48. En utilisant la définition, montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur leur domaine de définition (ou sur le domaine spécifié) et calculer leur dérivée :
a. $f(x) = ax+b$, $a, b \in \mathbb{R}$, b. $f(x) = x^3$, c. $f(x) = \sqrt{x}$, si $x > 0$.

49. Montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

50. Calculer l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = x^3 - x^2 - x$ au point d'abscisse $x = 2$.

51. Montrer que la droite $y = -x$ est tangente à la courbe donnée par l'équation $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Trouver le point de tangence. Est-ce que cette tangente intersecte la courbe en d'autres points ?

$$(\lambda f + \mu g)' = \lambda f' + \mu g' \qquad (f\,g)' = f'g + fg' \qquad \left(\frac{1}{f}\right)' = -\frac{f'}{f^2} \qquad (x^\alpha)' = \alpha\, x^{\alpha-1}$$
$$\left(\frac{f}{g}\right)' = \frac{f'g - fg'}{g^2} \qquad (f\circ g)'(x) = f'(g(x))\, g'(x) \qquad (f^{-1})'(x) = \frac{1}{f'(f^{-1}(x))}$$
$$\sin' x = \cos x \qquad \cos' x = -\sin x \qquad \tan' x = \frac{1}{\cos^2 x} = 1 + \tan^2 x \qquad (\ln x)' = \frac{1}{x}$$
$$(\exp x)' = \exp x \qquad \left(\frac{1}{x}\right)' = -\frac{1}{x^2} \qquad (|x|)' = \frac{x}{|x|}$$

52. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :
a. $f(x) = x^2 + 3x + 2$, b. $f(x) = x^4 + \sin x$, c. $f(x) = x^4 \sin x$,
d. $f(x) = \frac{1}{x+1}$, e. $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$, f. $f(x) = x \ln x$, g. $f(x) = \arcsin x$,
h. $f(x) = \frac{x \sin x}{1+x^2}$, i. $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$, j. $f(x) = x^{3/2}$, k. $f(x) = \arctan x$.

53. Pour quelles valeurs de a et b (en termes de c) les fonctions suivantes sont-elles dérivables en c :
a. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leqslant c \\ ax+b & \text{si } x > c, \end{cases}$ b. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } |x| > c \\ a + bx^2 & \text{si } |x| \leqslant c, \end{cases}$
c. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leqslant c \\ ax+b & \text{si } x > c. \end{cases}$

54. Montrer que si une fonction f est paire et dérivable, alors f' est une fonction impaire.

55. Montrer que pour tous $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$1 + x + x^2 + \ldots + x^n = \frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

Déduire, par dérivation, des formules pour les sommes suivantes :

$$1 + 2x + 3x^2 + \ldots + nx^{n-1}, \qquad 1^2 x + 2^2 x^2 + 3^2 x^3 + \ldots + n^2 x^n.$$

56 (facultatif)**.** Calculer le dérivées des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :
a. $f(x) = x^{1/2} + x^{1/3} + x^{1/4}$, b. $f(x) = x^{-1/2} + x^{-1/3} + x^{-1/4}$, c. $f(x) = \frac{\sqrt{x}}{1+x}$,
d. $f(x) = \frac{x}{1+\sqrt{x}}$, e. $f(x) = \frac{x^2+3x+2}{x^4+x^2+1}$, f. $f(x) = (\ln(\frac{1+x}{1-x}))^{\frac{1}{3}}$, g. $f(x) = x^x$,
h. $f(x) = x \tan x$, i. $f(x) = \frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}$, j. $f(x) = \frac{2x}{1-x^2}$, k. $f(x) = \frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$,
l. $f(x) = \frac{\sin x}{x}$, m. $f(x) = \frac{\cos x}{2x^2+3}$, n. $f(x) = \frac{ax^2+bx+c}{\sin x + \cos x}$,
o. $f(x) = \cos(2x) - 2\sin(x)$, p. $f(x) = \sin((\cos x)^2) + \cos((\sin x)^2)$,
q. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$, r. $f(x) = (2-x^2)\cos(x^2) + 2x\sin(x^3)$,
s. $f(x) = (\sin x)^n \cos(nx)$, t. $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$, u. $f(x) = \frac{(\sin x)^2}{\sin(x^2)}$,
v. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, w. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, x. $f(x) = \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{1/3}$,
y. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, z. $f(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$.

$$(f\,g)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} f^{(n-k)} g^{(k)}$$

57. Calculer les dérivées successives de :
a. $x^2 e^x$, b. $\ln(1+x)$, c. $\sin x + \cos x$.

Extremum local et points critiques. Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis. Signe de la dérivée et fonctions monotones. Inégalité des accroissements finis.

58. Étudier les extremums de la fonction f_λ définie par $f_\lambda(x) = x^3 + \lambda x$ en fonction du paramètre λ réel.

59. Calculer en quel point la fonction $f(x) = ax^2 + bx + c$ admet un extremum local.

60. Soit $f : [0,2] \to \mathbb{R}$ une fonction deux fois dérivable telle que $f(0) = f(1) = f(2) = 0$. Montrer qu'il existe $c_1, c_2 \in [0,2]$, $c_1 \neq c_2$, tels que $f'(c_1) = f'(c_2) = 0$. Montrer qu'il existe $c_3 \in [0,2]$ tel que $f''(c_3) = 0$.

Règle de l'Hospital.

61. Calculer les limites suivantes en utilisant, si nécessaire, le théorème de L'Hôpital :
a. $\lim_{x\to 2} \frac{3x^2+2x-16}{x^2-x-2}$, b. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{(1+x)^n-1}$, c. $\lim_{x\to 0} \frac{x-\tan x}{x-\sin x}$,
d. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$, e. $\lim_{x\to 1} \frac{x^c-cx+c-1}{(x-1)^2}$, f. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$,
g. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(1/x)}{\arctan(1/x)}$, h. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan x}$, i. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\ln(a+be^x)}{\sqrt{a+bx^2}}$.

62 (facultatif)**.** Calculer les limites suivantes :
a. $\lim_{x\to +\infty} x^4 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1 + \frac{1}{2x^2}\right)$, b. $\lim_{x\to \pi} \frac{\ln|\sin x|}{\ln|\sin 2x|}$, c. $\lim_{x\to \frac{1}{2}^-} \frac{\ln(1-2x)}{\tan(\pi x)}$,
d. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$, e. $\lim_{x\to 1^-} (\ln x)\ln(1-x)$, f. $\lim_{x\to 0^+} x^{(x^x-1)}$,
g. $\lim_{x\to 0^-} (1-2^x)^{\sin x}$, h. $\lim_{x\to 0^+} (\cot x)^{\sin x}$, i. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\tan(2x)}$,
j. $\lim_{x\to 0^+} \left(\ln\frac{1}{x}\right)^x$, k. $\lim_{x\to 0^+} x^{e/(1+\ln x)}$, l. $\lim_{x\to 1} (2-x)^{\tan(\pi x/2)}$,
m. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{\ln(x+\sqrt{1+x^2})} - \frac{1}{\log(1+x)}\right)$. n. $\lim_{x\to 0} \frac{e^{-1/x^2}}{x^{1000}}$, o. $\lim_{x\to +\infty} \frac{\cosh(x+1)}{e^x}$,
p. $\lim_{x\to \frac{\pi}{2}} \frac{\tan x-5}{\sec x+4}$, q. $\lim_{x\to +\infty} x^{1/4} \sin\left(\frac{1}{\sqrt{x}}\right)$,
r. $\lim_{x\to \infty} (x^2 - \sqrt{x^4 - x^2 + 1})$, s. $\lim_{x\to 0^+} \left(\frac{\ln x}{(1+x)^2} - \ln\left(\frac{x}{1+x}\right)\right)$,
t. $\lim_{x\to 0^+} (x^{(x^x)} - 1)$, u. $\lim_{x\to 0^+} x^{1/\ln x}$.

Étude de fonctions : établir le domaine de définition, trouver tous les points critiques, étudier le signe de la dérivée, construire le tableau de variations, trouver les extrema de la fonction, calculer, si nécessaire, les limites au bord du domaine de définition, et faire un dessin du graphe de $f(x)$.

63. Étudier la représentation graphique des fonctions suivantes :
a. $f(x) = x^2 - 3x + 2$, b. $f(x) = x^3 - 4x$, c. $f(x) = x + \cos x$.

64 (facultatif)**.** Étudier la représentation graphique des fonctions suivantes :
a. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$, b. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$, c. $f(x) = 2 + (x-1)^4$,
d. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, e. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$, f. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$, g. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$,
h. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-9}$, i. $f(x) = (\sin x)^2$, j. $f(x) = x - \sin x$,
k. $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}\cos(2x)$.