65. Trouver une primitive des fonctions suivantes et l'utiliser pour calculer l'intégrale $\int_a^b f(x)dx$:
a. $f(x) = 5x^3$, b. $f(x) = 4x^2 - 12x$, c. $f(x) = (x+1)(x^3-2)$,
d. $f(x) = \frac{x^4+x-3}{x^3}, x \neq 0$, e. $f(x) = (1+\sqrt{x})^2, x > 0$, f. $f(x) = \frac{2x^2-6x+7}{\sqrt{x}}, x > 0$,
g. $f(x) = 2x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}, x > 0$, h. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{\frac{1}{2}x}, x > 0$, i. $f(x) = 3\sin x + 2x^5$,
j. $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 5\cos x$.

66. Calculer les intégrales suivants :
a. $\int_0^x |t|dt$, b. $\int_0^x (t+|t|)^2 dt$.

67. Sans essayer d'évaluer les intégrales explicitement, calculer la dérivée $f'(x)$ si $f(x)$ est donnée par :
a. $f(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3} dt$, b. $f(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt$, c. $f(x) = \int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3} dt$.

68. Calculer par changement de variable les intégrales indéfinies suivantes :
a. $\int x^3 \cos(x^4) dx$, b. $\int (\cos x)^2 \sin(x) dx$, c. $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}} dx$, d. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}} dx$,
e. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}} dx$, f. $\int \sqrt{2x+1} dx$, g. $\int x\sqrt{1+3x} dx$, h. $\int x^2\sqrt{x+1} dx$,
i. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3} dx$, j. $\int (\sin x)^3 dx$, k. $\int \frac{\cos x}{(\sin x)^3} dx$, l. $\int \frac{\sin x}{(3+\cos x)^2} dx$.

69. Calculer par changement de variable les intégrales suivantes :
a. $\int_{-2/3}^{1/3} \frac{x}{\sqrt{2-3x}} dx$, b. $\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\sqrt{4-\sin(2x)} dx$, c. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{(\cos x)^3}} dx$,
d. $\int_3^8 \frac{\sin\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}} dx$, e. $\int x^{n-1}\sin(x^n) dx$, $n \neq 0$, f. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}} dx$,
g. $\int t(1+t)^{1/4} dt$, h. $\int (x^2+1)^{-3/2} dx$, i. $\int x^2(8x^3+27)^{2/3} dx$,
j. $\int \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^{1/3} dx}$, k. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}} dx$, l. $\int \frac{(x^2+1-2x)^{1/5}}{1-x} dx$.

70. Montrer que, pour $x > 0$,

$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2} dt = \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2} dt.$$

71. En utilisant le changement de variable $u = \pi - x$, montrer que

$$\int_0^\pi x f(\sin x) dx = \frac{\pi}{2} \int_0^\pi f(\sin x) dx.$$

En déduire que

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+(\cos x)^2} dx = \pi \int_0^1 \frac{1}{1+x^2} dx.$$

72. Calculer, par intégration par parties, les intégrales suivantes :
a. $\int x\cos x dx$, b. $\int x^2 \cos x dx$, c. $\int x \sin x dx$, d. $\int x^2 \sin x dx$,
e. $\int x^3 \cos x dx$, f. $\int x^3 \sin x dx$, g. $\int (\sin x)^2 dx$.

73. Utiliser l'intégration par parties pour démontrer les formules suivantes :

$$\int (\sin x)^n dx = -\frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}\cos x + \frac{n-1}{n}\int (\sin x)^{n-2} dx,$$

$$\int (\cos x)^n dx = \frac{1}{n}(\cos x)^{n-1}\sin x + \frac{n-1}{n}\int (\cos x)^{n-2} dx.$$

En déduire les formules suivantes :
a. $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx = \frac{\pi}{4}$, b. $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^4 dx = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx = \frac{3\pi}{16}$,
c. $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^6 dx = \frac{5}{6}\int_0^{\pi/2} (\sin x)^4 dx = \frac{5\pi}{32}$, d. $\int (\sin x)^3 dx = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos(3x)$,
e. $\int (\sin x)^4 dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)$,
f. $\int (\sin x)^5 dx = -\frac{5}{8}x + \frac{5}{48}\cos(3x) - \frac{1}{80}\cos 5x$.
Déduire des formules analogues pour les premières valeurs de $n > 1$ de $\int (\cos x)^n dx$.

74. Calculer les intégrales suivantes :
a. $\int \ln x dx$, b. $\int \sin(\ln x) dx$, c. $\int \frac{1}{2+3x} dx$, d. $\int (\ln x)^2 dx$, e. $\int x\ln(x) dx$,
f. $\int x(\ln x)^2 dx$, g. $\int_0^{e^3-1} \frac{1}{1+t} dt$, h. $\int \cot x dx$, i. $\int x^n \ln(ax) dx$,
j. $\int x^2(\ln x)^2 dx$, k. $\int \frac{1}{x\ln x} dx$, l. $\int \frac{\ln|x|}{x\sqrt{1+\ln|x|}} dx$.

75. Calculer les intégrales suivantes :
a. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}} dx$, $a \neq 0$, b. $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}} dx$, c. $\int \frac{1}{a^2+x^2} dx$, $a \neq 0$,
d. $\int \frac{1}{a+bx^2} dx$, $ab \neq 0$, e. $\int \frac{1}{x^2-x+2} dx$, f. $\int x \arctan x \, dx$,
g. $\int x^2 \arccos x \, dx$, h. $\int x(\arctan x)^2 dx$, i. $\int \arctan\sqrt{x} \, dx$,
j. $\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}} dx$, $a \neq b$, k. $\int \sqrt{1-x^2} dx$, l. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}} dx$.

76 (facultatif)**.** Utiliser l'intégration par parties pour démontrer les formules :
a. $\int \sqrt{1-x^2} dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}} dx$,
b. $\int (a^2-x^2)^n dx = \frac{1}{2n+1}x(a^2-x^2)^n + a^2\frac{2n}{2n+1}\int (a^2-x^2)^{n-1} dx$,
c. $\int \frac{(\sin x)^{n+1}}{(\cos x)^{m+1}} dx = \frac{1}{m}\frac{(\sin x)^n}{(\cos x)^m} - \frac{n}{m}\int \frac{(\sin x)^{n-1}}{(\cos x)^{m-1}} dx$,
d. $\int \frac{(\cos x)^{n+1}}{(\sin x)^{m+1}} dx = -\frac{1}{m}\frac{(\cos x)^n}{(\sin x)^m} - \frac{n}{m}\int \frac{(\cos x)^{n-1}}{(\sin x)^{m-1}} dx$,
e. $\int x^m (\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1} dx$.