Examen du 8 janvier 2020, 11h00-13h00.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^2}{4} + x - \arctan(x).$$

a. Déterminer le domaine de définition maximal de f.
b. Calculer les limites de f en $\pm\infty$.
c. Calculer la dérivée de f.
d. Trouver tous les points critiques de f.
e. Étudier le signe de la dérivée, trouver le sens de variation et les extrema de f.

2. Calculer la limite suivante en utilisant le théorème de L'Hôpital :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x) - 1}{(\ln(x+1))^2}.$$

3. Donner une primitive de :

a. $\frac{1}{x-1}$, **b.** $x\sin(x)$, **c.** $\frac{e^x}{1+e^{2x}}$.

4. Calculer les intégrales suivantes :

a. $\int_0^1 (x-1)(x^2+2)dx$, **b.** $\int_0^{\pi/2} (\sin x)^2 dx$, **c.** $\int_{-1}^0 x^2\sqrt{x+1}\ dx$.

Suggestion : Dans **c.** utiliser le changement de variable $x = y^2 - 1$.

5. Calculer la dérivée de :
a. $h(x) = \int_0^x \sin(t)\ dt$,
b. $g(x) = \int_0^{\sin(x)} (\arcsin(t))^5\ dt, \quad x \in [0, \pi/2]$.

6.
a. Calculer les trois premiers termes non nuls du polynôme de Taylor en 0 de la fonction suivante :

$$\cos(x)\sqrt{x+1}.$$

b. Calculer la limite :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\cos(x)\sqrt{x+1} - 1}{\sin(x)}.$$