

1 - Rappels

Feuille de TD

Ensembles des nombres réels, rationnels, entiers, naturels. Droite réelle. Langage de la logique et des ensembles. Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale périodique. Démonstration de l'irrationalité de la racine carrée de deux. Raisonnement cas par cas, par contraposée et par l'absurde.

1. Dire si les nombres suivants sont naturels, entiers, rationnels ou réels :
a. 0,125453 b. -27 c. -27,1 d. $\sqrt{2} \simeq 1,4142\dots$ e. $\sqrt{4}$ f. $\pi \simeq 3,1415\dots$
g. 0,121212... (périodique) h. $e \simeq 2,7182\dots$ (constante de Néper) i. 1,231111...
Écrire les fractions qui correspondent aux nombres rationnels.

2. Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Dire quand on utilise le raisonnement cas par cas, par contraposée ou par l'absurde.

3. Exprimer les symboles suivants en français : \implies , \iff , \forall , \exists , \in , \subset , \emptyset , \cup , \cap .

4. Écrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes :

a. Pour tout nombre réel son carré est strictement positif.

b. Il existe un nombre naturel n tel que n^4 soit plus grand que 100.

Puis écrire la négation de chaque phrase. Dire si chaque assertion est vraie ou fausse.

Intervalles. Propriétés d'ordre des réels. Inéquations.

5. Résoudre les inéquations suivantes. Exprimer le résultat sous la forme de intervalle.

a. $2x - 1 > x + 3$, b. $-\frac{x}{3} \geq 2x - 1$, c. $\frac{2}{x-1} \geq 5$, d. $\frac{3}{x-1} < -\frac{2}{x}$.

6. Résoudre les systèmes des inéquations suivants :

a. $3 \leq 2x + 1 \leq 5$, b. $3x - 1 < 5x + 3 \leq 2x + 15$.

7. Résoudre les inéquations quadratiques suivantes :

a. $x^2 - 5x + 6 < 0$, b. $2x^2 + 1 > 4x$, c. $x^2 - 2x \leq 0$.

$$a < b, c > 0 \implies ac < bc, \quad a < b, c < 0 \implies ac > bc$$

Valeur absolue. Équations et inéquations avec la valeur absolue.

8. Résoudre les équations suivantes :

a. $|x| = 2$, b. $|x - 3| = 2$, c. $|x - 2| = |x + 2|$, d. $|x - 7| = x - 3$,
e. $|x - 1| + |x - 7| = 3$.

9. Résoudre les inéquations suivantes :

a. $|x| \leq 3$, b. $|x - 3| \leq 5$, c. $|x + 4| \geq 1$, d. $|x + 3| \leq 2 - x$.

$$|x| = x \operatorname{sgn}(x), \quad |x + y| \leq |x| + |y|$$

10. Montrer que $||x| - |y|| \leq |x - y|$, à partir de l'inégalité triangulaire.

Produit et plan cartésien. L'équation de la droite. Distance entre deux points.

11. Écrire l'équation de la droite dans le plan cartésien qui passe par les points de coordonnées (1,0) et (2,3). Trouver le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite.

12. Calculer la distance entre les points (3,-3) et (-1,2) du plan cartésien.

Polynômes et fonctions rationnelles. Division de polynômes.

13. Rappeler les identités remarquables suivantes :

a. $(a-b)^2$, b. $a^2 - b^2$, c. $(a+b)^2$, d. $(a+b)^3$, e. $a^3 + b^3$, f. $a^3 - b^3$.

14. Trouver les racines des polynômes suivants :

a. $x^2 - 3x - 10$, b. $x^4 + 6x^3 + 9x^2$, c. $x^3 - x^2 - 4x + 4$.

15. Donner le quotient et le reste des divisions suivantes :

a. $\frac{x^3-1}{x^2-2}$, b. $\frac{x^2}{x^2+5x+3}$.

16. Factoriser les expressions suivantes :

a. $x^3 + x^2 - 3x + 1$, b. $x^4 + x^3 - x - 1$.

$$ax^2 + bx + c = 0 \iff x = \frac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$$

$$A_m/B_n = Q_{m-n} + R_k/B_n, \quad k < n$$

Trigonométrie et fonctions circulaires.

17. Montrer les identités trigonométriques suivantes :

a. $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$, b. $\cos(\pi-x) = -\cos(x)$,
c. $\sin(\frac{\pi}{2}-x) = \cos(x)$, d. $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, e. $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$,
f. $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$, g. $\cos(x)+\cos(y) = 2\cos((x+y)/2)\cos((x-y)/2)$.

18. Résoudre les équations trigonométriques suivantes :

a. $\sin(3x) = \frac{1}{2}$, b. $\sin^2(x) + 2\sin(x) - 3 = 0$, c. $2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 1$,
d. $\sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0$, e. $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x)$.

$$\cos(x+y) = \cos(x)\cos(y) - \sin(x)\sin(y) \quad \cos^2(x) + \sin^2(x) = 1$$

$$\sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y) \quad \tan(x) = \frac{\sin(x)}{\cos(x)}$$