2 - Les fonctions, la limite et la continuité **Feuille de TD**

Définition de fonction. Domaine de définition. Graphe. Ensemble image. Somme, produit, quotient, composition de fonctions. Fonctions bornées, monotones, paires, impaires, périodiques.

19. Donner le domaine de définition et l'ensemble image des fonctions suivantes :
a. $e^x - x^3$, b. x^{-n}, $n \in \mathbb{N}^*$, c. $\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$, d. $\sin(x)$, e. $\ln(x)$, f. $\frac{x}{x^2-4}$,
g. $\sqrt{x^2+x+1}$, h. $x^{1/x}$,

20. Montrer que la fonction $f(x) = -1 + \frac{2x^2}{x^2+1}$ est bornée, car majorée par 1 et minorée par -1. Montrer qu'elle est aussi majorée par la fonction $g(x) = x^2$.

21. Soit $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Montrer que $|f(x)|$ est majorée par $\frac{1}{2}$.

22. La fonction $\frac{1}{x}$ est-elle monotone sur $]-\infty, 0[$? Et sur $]0, +\infty[$? Et sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

23. Déterminer si le fonctions suivantes sont paires ou impaires :
a. $3x^6 + 2x^2$, b. $\frac{\tan x - x}{x^3 \cos x}$, c. $\frac{\sin^2(2x) - \cos(3x)}{\tan x}$, d. $\frac{x-1}{\sin(x+1)} + \cos x$.

24. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions paires. Que peut-on dire sur la parité de la somme $f+g$, du produit fg, et de la composée $f \circ g$? Et si f, g sont impaires ? Et si l'une est paire et l'autre impaire ?

25. Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période 2 et 3 respectivement. Montrer que la somme $f+g$ est une fonction périodique.

Définition de la limite. Limite finie et infinie en un point. Limites à gauche et à droite. Limites en l'infini. Unicité de la limite.

26. Écrire les définitions des limites suivantes :
a. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$, b. $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$, c. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$,

27. Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, et f une fonction définie sur $I \setminus \{x_0\}$. Écrire la définition de $\lim_{x\to x_0} f(x) = -\infty$.

28. Soit $f :]a, +\infty[\to \mathbb{R}$. Écrire la définition de $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$.

29. Montrer, en utilisant la définition de limite, que :
a. $\lim_{x\to a} x = a$, b. $\lim_{x\to 0} x^3 = 0$, c. $\lim_{x\to+\infty} \frac{1}{x} = 0$.

30. Soit $H(x)$ la fonction de Heaviside. Montrer, en utilisant la définition de limite à droite et à gauche, que : a. $\lim_{x\to 0^+} H(x) = 1$, b. $\lim_{x\to 0^-} H(x) = 0$.
Conclure que la limite de $H(x)$ en 0 n'existe pas, en énonçant la proposition appropriée.

31. Montrer, en utilisant la définition de limite, que :
a. $\lim_{x\to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$, b. $\lim_{x\to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty$, c. $\lim_{x\to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty$.
Que peut-on dire de la limite de $\frac{1}{x}$ en 0 ?

32. Soit $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 2, \\ 1 & \text{si } x = 2. \end{cases}$ Calculer $\lim_{x\to 2} g(x)$.

33. Soit $f(x) = \frac{|x-2|}{x^2+x-6}$. Calculer $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ et $\lim_{x\to 2} f(x)$.

34. Calculer les limites à gauche et à droite en $+1$ et -1 de $\sqrt{1-x^2}$.

$x_0 \in I$ ouvert, $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$: $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff$ pour tout voisinage U_ℓ de ℓ il existe un voisinage U_{x_0} de x_0 tel que $\forall x \in U_{x_0} \cap (I \setminus \{x_0\}) \implies f(x) \in U_\ell$

$x_0 \in I$ ouvert, $f : I \setminus \{x_0\} \to \mathbb{R}$, $\ell \in \mathbb{R}$: $\lim\limits_{x\to x_0} f(x) = \ell \iff \forall \epsilon > 0 \; \exists \delta > 0 \;\Big|\; \forall x \in I \setminus \{x_0\},\ 0 < \lvert x - x_0\rvert < \delta \implies \lvert f(x) - \ell\rvert < \epsilon$

Propriétés des limites par rapport aux opérations. Formes indéterminées. Inégalités et limites. Théorème des gendarmes. Limites des polynômes et des fonctions rationnelles.

35. Calculer les limites des fonctions rationnelles suivantes :
a. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2}$, b. $\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2}$, $a \neq 0$, c. $\lim_{x\to 0} \frac{25x^3+2}{75x^7-2}$,
d. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$, e. $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-3x+1}{x-1}$, f. $\lim_{x\to 0} \frac{(t+x)^2-t^2}{x}$.

36. Calculer les limites suivantes :
a. $\lim_{x\to 0} \tan x$, b. $\lim_{x\to 0}(\sin(2x) + x^2\cos(5x))$, c. $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|}{x}$,
d. $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.

37. En utilisant le théorème des gendarmes, montrer que si $\lim_{x\to a} |f(x)| = 0$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

38. Calculer les limites suivantes :
a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, b. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$, c. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x}$, d. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\sin x}$,
e. $\lim_{x\to a} \frac{\sin x - \sin a}{x-a}$, f. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin x}$, g. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Continuité en un point. Continuité sur un intervalle. Continuité et opérations élémentaires. Prolongement par continuité. Lemme du signe. Théorème des valeurs intermédiaires. Fonctions continues sur un intervalle borné et fermé.

$f : I \to \mathbb{R}$, $x_0 \in I$; f continue en $x_0 \iff \lim_{x\to x_0} f(x) = f(x_0)$

39. Montrer la continuité des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Suggestion. Utiliser l'inégalité $|\sin(x)| \leqslant |x|$ pour montrer la continuité de $\sin(x)$ en 0. Utiliser l'identité $\cos(2x) = 1 - 2(\sin x)^2$ pour en déduire la continuité de $\cos(x)$ en 0. Utiliser les formules pour $\sin(x+h)$ et $\cos(x+h)$ pour montrer la continuité pour tout $x \in \mathbb{R}$.

40. Déterminer le domaine de définition et de continuité des fonctions suivantes :
a. $\frac{1}{\sin(x)}$, b. $\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{2}}}$, c. $\ln(x^2+x-1)$.

41. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$. Calculer la limite de f lorsque x tend vers 0. Trouver le prolongement par continuité $\tilde{f}(x)$ de f en 0.

Suggestion. Majorer la valeur absolue de $f(x)$ et utiliser le théorème des gendarmes.

42. Étudier la continuité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)\cos(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Même question pour $g(x) = xH(x)$.

43. La fonction $\frac{x^3+8}{|x+2|}$ admet-elle un prolongement par continuité en $x = -2$?

44. Soit $f(x)$ une fonction continue sur $\mathbb{R}$, telle que $f(0) = 1$. Montrer qu'il existe $\delta > 0$ tel que, pour tout $x \in]-\delta, \delta[$, on a $f(x) > \frac{1}{2}$.

45. Calculer les limites suivantes en expliquant quel résultat sur les limites on est en train d'utiliser :
a. $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$, b. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$, c. $\lim_{x\to 4} \sqrt{1+\sqrt{x}}$,
d. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$, e. $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$, f. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$,
g. $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$, h. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$.

46. Calculer les limites suivantes :
a. $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$, b. $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x}-x\right)$, c. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,
d. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, e. $\lim_{x\to -\infty} \left(3x^3-x^2+2\right)$, f. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-x+3}{3x^2+5}$,
g. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+1}{x^2+1}$, h. $\lim_{x\to \infty} \frac{5x+2}{2x^3-1}$.

Fonctions injectives, surjectives et bijectives. Fonction réciproque. Théorème de la bijection pour une fonction continue et strictement monotone.

47. Montrer que la fonction $g(x) = \sqrt{2x+1}$ est bijective et trouver sa fonction réciproque $g^{-1}(y)$.

48. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$. a. Énoncer le théorème de la bijection. b. Montrer, en trouvant un contre-exemple, que l'hypothèse "continue" est nécessaire. c. Montrer, en trouvant un contre-exemple, que l'hypothèse "strictement monotone" est nécessaire.

49. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x$. Montrer que f est bijective, tracer le graphe de f et f^{-1}.