4 - L'intégrale **Feuille de TD**

Subdivision d'un intervalle. Intégrale des fonctions en escalier. Définition de fonction intégrable au sens de Riemann. Propriétés de l'intégrale. Primitives et intégrales. Intégration par parties. Changement de variable. Intégration des fonctions rationnelles.

67. Trouver pour chacune des fonctions suivantes une primitive et l'utiliser pour calculer l'intégrale $\int_1^2 f(x)dx$:
a. $f(x) = 5x^3$, b. $f(x) = 4x^2 - 12x$, c. $f(x) = (x+1)(x^3-2)$,
d. $f(x) = \frac{x^4+x-3}{x^3}, x \neq 0$, e. $f(x) = (1+\sqrt{x})^2, x > 0$, f. $f(x) = \frac{2x^2-6x+7}{\sqrt{x}}, x > 0$,
g. $f(x) = 2x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}, x > 0$, h. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{\frac{1}{2}x}, x > 0$, i. $f(x) = 3\sin x + 2x^5$,
j. $f(x) = x^{\frac{4}{3}} - 5\cos x$.

68. Calculer les intégrales suivantes :
a. $\int_0^x |t|dt$, b. $\int_0^x (t+|t|)^2 dt$.

69. Sans essayer d'évaluer les intégrales explicitement, calculer la dérivée $f'(x)$ si $f(x)$ est donnée par :
a. $f(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3}dt$, b. $f(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}dt$, c. $f(x) = \int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3}dt$.

70. Calculer par changement de variable les intégrales indéfinies suivantes :
a. $\int x^3\cos(x^4)dx$, b. $\int (\cos x)^2\sin(x)dx$, c. $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$, d. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$,
e. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$, f. $\int \sqrt{2x+1}dx$, g. $\int x\sqrt{1+3x}dx$, h. $\int x^2\sqrt{x+1}dx$,
i. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}dx$, j. $\int (\sin x)^3 dx$, k. $\int \frac{\cos x}{(\sin x)^3}dx$, l. $\int \frac{\sin x}{(3+\cos x)^2}dx$.

71. Calculer par changement de variable les intégrales suivantes :
a. $\int_{-2/3}^{1/3} \frac{x}{\sqrt{2-3x}}dx$, b. $\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\sqrt{4-\sin(2x)}dx$, c. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{(\cos x)^3}}dx$,
d. $\int_3^8 \frac{\sin\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$, e. $\int x^{n-1}\sin(x^n)dx$, $n \neq 0$, f. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}dx$,
g. $\int t(1+t)^{1/4}dt$, h. $\int (x^2+1)^{-3/2}dx$, i. $\int x^2(8x^3+27)^{2/3}dx$,
j. $\int \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^{1/3}dx}$, k. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}dx$, l. $\int \frac{(x^2+1-2x)^{1/5}}{1-x}dx$.

72. Montrer que, pour $x > 0$,

$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2}dt.$$

73. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. En utilisant le changement de variable $u = \pi - x$, montrer que

$$\int_0^\pi xf(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx.$$

En déduire que

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+(\cos x)^2}dx = \pi\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx.$$

74. Calculer, par intégration par parties, les intégrales suivantes :
a. $\int x\cos x dx$, b. $\int x^2\cos x dx$, c. $\int x\sin x dx$, d. $\int x^2\sin x dx$,
e. $\int x^3\cos x dx$, f. $\int x^3\sin x dx$, g. $\int (\sin x)^2 dx$.

75. Utiliser l'intégration par parties pour démontrer les formules suivantes :

$$\int (\sin x)^n dx = -\frac{1}{n}(\sin x)^{n-1}\cos x + \frac{n-1}{n}\int (\sin x)^{n-2}dx,$$

$$\int (\cos x)^n dx = \frac{1}{n}(\cos x)^{n-1}\sin x + \frac{n-1}{n}\int (\cos x)^{n-2}dx.$$

En déduire les formules suivantes :
a. $\int_0^{\pi/2}(\sin x)^2dx = \frac{\pi}{4}$, b. $\int_0^{\pi/2}(\sin x)^4dx = \frac{3}{4}\int_0^{\pi/2}(\sin x)^2dx = \frac{3\pi}{16}$,
c. $\int_0^{\pi/2}(\sin x)^6dx = \frac{5}{6}\int_0^{\pi/2}(\sin x)^4dx = \frac{5\pi}{32}$, d. $\int (\sin x)^3dx = -\frac{3}{4}\cos x + \frac{1}{12}\cos(3x)$,
e. $\int (\sin x)^4dx = \frac{3}{8}x - \frac{1}{4}\sin(2x) + \frac{1}{32}\sin(4x)$,
f. $\int (\sin x)^5dx = -\frac{5}{8}x + \frac{5}{48}\cos(3x) - \frac{1}{80}\cos 5x$.
Déduire des formules analogues pour les premières valeurs de $n > 1$ de $\int(\cos x)^n dx$.

76. Calculer les primitives suivantes. On précisera sur quel intervalle on se place pour le calcul d'une telle primitive.
a. $\int \ln x dx$, b. $\int \sin(\ln x)dx$, c. $\int \frac{1}{2+3x}dx$, d. $\int (\ln x)^2dx$, e. $\int x\ln(x)dx$,
f. $\int x(\ln x)^2dx$, g. $\int_0^{e^3-1}\frac{1}{1+t}dt$, h. $\int \cot x dx$, i. $\int x^n\ln(ax)dx$,
j. $\int x^2(\ln x)^2dx$, k. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$, l. $\int \frac{\ln|x|}{x\sqrt{1+\ln|x|}}dx$.

77. Calculer les primitives suivantes. On précisera sur quel intervalle on se place pour le calcul d'une telle primitive.
a. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,\ a \neq 0$, b. $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$, c. $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx,\ a \neq 0$,
d. $\int \frac{1}{a+bx^2}dx,\ ab \neq 0$, e. $\int \frac{1}{x^2-x+2}dx$, f. $\int x\arctan x\ dx$,
g. $\int x^2\arccos x\ dx$, h. $\int x(\arctan x)^2dx$, i. $\int \arctan\sqrt{x}\ dx$,
j. $\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}dx,\ a \neq b$, k. $\int \sqrt{1-x^2}dx$, l. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$.

78 (facultatif)**.** Utiliser l'intégration par parties pour démontrer les formules :
a. $\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$,
b. $\int (a^2-x^2)^ndx = \frac{1}{2n+1}x(a^2-x^2)^n + a^2\frac{2n}{2n+1}\int (a^2-x^2)^{n-1}dx$,
c. $\int \frac{(\sin x)^{n+1}}{(\cos x)^{m+1}}dx = \frac{1}{m}\frac{(\sin x)^n}{(\cos x)^m} - \frac{n}{m}\int \frac{(\sin x)^{n-1}}{(\cos x)^{m-1}}dx$,
d. $\int \frac{(\cos x)^{n+1}}{(\sin x)^{m+1}}dx = -\frac{1}{m}\frac{(\cos x)^n}{(\sin x)^m} - \frac{n}{m}\int \frac{(\cos x)^{n-1}}{(\sin x)^{m-1}}dx$,
e. $\int x^m(\ln x)^ndx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}dx$.