Formule de Taylor. Reste intégral. Reste $f^{(n+1)}(c)$. Formule de Taylor-Young. Développement limité. Unicité. Opérations. Dérivée. Primitive. Calculs de limites.

79. Calculer les trois premiers termes non nuls des polynômes de Taylor au point 0 des fonctions suivantes :
a. $f(x) = \sin(2x)$, b. $f(x) = e^{x^2}$, c. $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$, d. $f(x) = \frac{\sinh^2 t}{1-\cos t}$.

80. Pour chaque fonction calculer le polynôme de Taylor $T_{x_0,n}(x)$ au point x_0 à l'ordre n indiqué :
a. $f(x) = \tan(x)$, $T_{\pi,2}(x) = ?$, b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $T_{2,2}(x) = ?$,
c. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 14x + 3$, $T_{1,100}(x) = ?$, d. $f(x) = \ln(x)$, $T_{1,3}(x) = ?$.

81. Pour chaque fonction $f(x)$ montrer que le polynôme de Taylor au point x_0 à l'ordre n est le polynôme $T_{x_0,n}(x)$ indiqué :
a. $f(x) = e^x$, $T_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!}x^k$, b. $f(x) = \ln\left(\frac{1}{1-x}\right)$, $T_{0,n}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{1}{k}x^k$,
c. $f(x) = a^x$, $T_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(\ln a)^k}{k!}x^k$, d. $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $T_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$,
e. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, $T_{0,2n+2}(x) = \sum_{k=0}^n x^{2k+1}$,

82. a. En utilisant l'intégration par partie, montrer que on peut écrire $\exp(x) = T_2(x) + R_2(x)$, où :

$$T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \qquad R_2(x) = \frac{1}{2}\int_0^x e^t (x-t)^2 dt.$$

b. Faire le changement de variable $t = sx$ et écrire

$$R_2(x) = \frac{x^3}{2}\int_0^1 e^{sx}(1-s)^2 ds.$$

c. Montrer que pour $x \leqslant 0$ on a l'estimation $\frac{x^3}{6} \leqslant R_2(x) \leqslant 0$.

d. En déduire que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} - \theta, \qquad 0 \leqslant \theta \leqslant (7 \cdot 6 \cdot 2^7)^{-1} \sim 0,000186.$$

83 (facultatif)**.** Pour chaque fonction $f(x)$ montrer que le polynôme de Taylor au point x_0 à l'ordre n est le polynôme $T_{x_0,n}(x)$ indiqué :
a. $f(x) = (\sin x)^2$, $T_{0,2n}(x) = \sum_{k=1}^n (-1)^{k+1}\frac{2^{2k-1}}{(2k)!}x^{2k}$,
b. $f(x) = \ln(1+x)$, $T_{0,n}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k}x^k$,
c. $f(x) = \ln\sqrt{\frac{1+x}{1-x}}$, $T_{0,2n+2}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2k+1}x^{2k+1}$,
d. $f(x) = \frac{1}{2-x}$, $T_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{2^{k+1}}x^k$.

Suggestion. a. Écrire $\sin^2(x)$ comme fonction de $\cos(2x)$.

$$\boxed{T_{x_0,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x-x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x-x_0)^2 + \cdots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n}$$

84. Montrer les formules de Taylor suivantes et l'estimation de leur reste :
a. $\sin x = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2n}(x)$, $|R_{2n}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$,
b. $\cos x = \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+1}(x)$, $|R_{2n+1}(x)| \leqslant \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}$,
c. $\arctan x = \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + R_{2n}(x)$, $|R_{2n}(x)| \leqslant \frac{x^{2n+1}}{2n+1}$, $0 \leqslant x \leqslant 1$.

$$\boxed{e^x = \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), \quad \ln(1+x) = -\sum_{k=1}^n \frac{(-x)^k}{k} + o(x^n), \quad \frac{1}{1-x} = \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n)}$$

85. Calculer les nombres suivants avec une erreur inférieure à 5×10^{-3} en valeur absolue :
a. $e^{0,1}$, b. e, c. $\ln(6/5)$, d. $\sin(1/10)$.

86. Calculer les limites suivantes en utilisant les développements limités et la notation "petit-o" :
a. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$, b. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)-2x^2}{x^4}$, c. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}$,
d. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}$, e. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x - x}{x^3}$, f. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1+x)}{e^{2x}-1}$, g. $\lim_{x\to 0} \frac{1-(\cos x)^2}{x\tan x}$,
h. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{\arctan x}$, i. $\lim_{x\to 0} \frac{a^x-1}{b^x-1}$, $b \neq 1$, j. $\lim_{x\to 1} \frac{\ln x}{x^2+x-2}$,
k. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(x^2)}{x^2\sin(x^2)}$, l. $\lim_{x\to 0} \frac{x(e^x+1)-2(e^x-1)}{x^3}$, m. $\lim_{x\to 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x-1}\right)$,
n. $\lim_{x\to 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1}\right)$.

87. Montrer que si $g(x) = o(1)$ pour $x \to 0$, on a

$$\frac{1}{1+g(x)} = 1 - g(x) + g(x)^2 + o(g(x)^2), \qquad \text{pour } x \to 0.$$

En déduire que

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5), \qquad \text{pour } x \to 0.$$

$f : I \to \mathbb{R}$ de classe C^{n+1} :

$$|f^{(n+1)}| \leqslant M \qquad \Longrightarrow \qquad |f(x) - T_{x_0,n}(x)| \leqslant M\frac{|x-x_0|^{n+1}}{n+1!} \qquad x \in I$$