Corrigé du partiel du 22 octobre 2020.

1. Le polynôme $P(x)$ est divisible par x et par $x-1$, puisque 0 et 1 sont des racines. En faisant la division euclidienne on trouve

$$P(x) = x(x-1)(x^2 - x + 1).$$

Le polynôme $x^2 - x + 1$ n'a pas de racines réelles, donc les seules deux racines réelles sont 0 et 1.

2. En éliminant la valeur absolue on trouve que la solution est donnée par l'union des solutions des deux systèmes suivants :

$$\begin{cases} x^2 - x \geqslant 0 \\ x^2 - x > 2, \end{cases} \qquad \begin{cases} x^2 - x < 0 \\ -x^2 + x > 2. \end{cases}$$

L'ensemble des solutions du premier système est $]-\infty, -1[\cup]2, +]\infty[$ et le deuxième système n'a pas de solution. Donc l'ensemble des solutions de l'inéquation est :

$$]-\infty, -1[\cup]2, +\infty[.$$

3. La racine carrée de y est définie pour $y \geqslant 0$. Donc il faut imposer $\cos(x) \geqslant 0$ et $x \neq 1$. On trouve le domaine de définition suivant :

$$\bigcup_{k\in\mathbb{Z}} [-\frac{\pi}{2} + 2\pi k, \frac{\pi}{2} + 2\pi k] \setminus \{1\}.$$

4. Pour tout $M > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $x \in]\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2} + \delta[$ alors $\arctan(x) < -M$. (Évidemment cette limite est égale à $\arctan(\pi/2)$ et pas à $-\infty$, mais la définition de l'expression $\lim_{x\to\pi/2^+} \arctan(x) = -\infty$ reste la même.)

5. Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-5x^2}{(x^2-1)(3x+7)} = \frac{1}{3}$,

b. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos(x))}{\cos(x)} = \lim_{y\to 0} \frac{\sin(y)}{y} = 1$,

c. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x} = [\frac{0}{0}] = \lim_{x\to 0} \frac{(\ln(\cos(x)))'}{(x)'} = \lim_{x\to 0} \frac{-\sin(x)}{\cos(x)} = 0.$

6.

a. $\mathbb{R} \setminus \{\pm 1\}$,

b. $\lim_{x\to 1^\pm} h(x) = \pm\infty$, $\lim_{x\to -1^\pm} h(x) = \mp\infty$, $\lim_{x\to\pm\infty} h(x) = 1$.

c. $h'(x) = \frac{-2x}{(x^2-1)^2}$. Le seul point critique est $x = 0$.

d. $h'(x) > 0$ ssi $x < 0$ et $x \neq -1$; $h'(x) < 0$ ssi $x > 0$ et $\neq 1$. Donc $h(x)$ est strictement décroissante si $x > 0$ et strictement croissante si $x < 0$. Il y a un maximum local en $x = 0$ où $h(0) = 0$.

7. Soient x et y les deux côtés du rectangle. Alors $A = xy$, $P = 2x + 2y$.

a. Si A est fixée, alors $y = \frac{A}{x}$ et $P = 2x + \frac{2A}{x}$. $P'(x) = 0$ pour $x = \sqrt{A}$ donc $y = \sqrt{A} = x$. Ce point critique est un minimum car $P''(\sqrt{A}) > 0$.

b. Si P est fixé, alors $y = \frac{P}{2} - x$ et $A = x\frac{P}{2} - x^2$. $A'(x) = 0$ pour $x = \frac{P}{4}$ donc $y = \frac{P}{4} = x$. Ce point critique est un maximum car $A''(\frac{P}{4}) < 0$.