Partiel du 22 octobre 2020, 16h15-18h15.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. On sait que $x = 1$ est une racine du polynôme

$$P(x) = x^4 - 2x^3 + 2x^2 - x.$$

Trouver les autres racines réelles de P.

2. Résoudre l'inéquation :

$$|x^2 - x| > 2.$$

3. Donner le domaine de définition de la fonction :

$$g(x) = \frac{\sqrt{\cos(x)}}{x-1}.$$

4. Écrire la définition de la limite :

$$\lim_{x \to \frac{\pi}{2}^+} \arctan(x) = -\infty.$$

5. Calculer les limites suivantes :

a. $\lim_{x\to+\infty} \frac{x^3-5x^2}{(x^2-1)(3x+7)}$,

b. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}} \frac{\sin(\cos(x))}{\cos(x)}$,

c. $\lim_{x\to 0} \frac{\ln(\cos(x))}{x}$.

6. On considère la fonction

$$h(x) = \frac{x^2}{x^2 - 1}.$$

a. Donner le domaine de définition de h.

b. Calculer les limites au bord du domaine de définition et en $\pm\infty$.

c. Calculer la dérivée et trouver tous les points critiques de h.

d. Étudier le signe de la dérivée, trouver le sens de variation et les extrema de h.

7. Montrer que :

a. parmi tous les rectangles d'aire fixée, le carré est celui dont le périmètre est minimal ;

b. parmi tous les rectangles de périmètre fixé, le carré est celui dont l'aire est maximale.

Suggestion : Pour la première question, écrire le périmètre du rectangle en terme des deux longueurs des côtés et utiliser la condition d'aire fixée pour réduire cette fonction de deux variables à une fonction d'une seule variable. Étudier enfin les minima de cette fonction pour trouver le rectangle dont le périmètre est minimal.