Corrigé de l'examen du 6 janvier 2021.

1.

a. $D_f = \mathbb{R} \setminus \{1\}$.

b. $\lim_{x\to+\infty} f(x) = 0$, $\lim_{x\to-\infty} f(x) = +\infty$,
$\lim_{x\to 1^+} f(x) = -\infty$, $\lim_{x\to 1^-} f(x) = +\infty$.

c. $f'(x) = -\frac{e^{-x}}{1-x} + \frac{e^{-x}}{(1-x)^2} = \frac{xe^{-x}}{(1-x)^2}$.

d. $f'(x) = 0 \iff x = 0$, donc le seul point critique est 0.

e. La dérivée $f'(x)$ a le même signe de x. Donc f est strictement croissante pour $x > 0$ et strictement décroissante pour $x < 0$. Le point $x = 0$ est donc un minimum local, mais pas global.

2.

a. $\frac{1}{2}e^{x^2}$,

b. $\cos(x) + x\sin(x)$.

3.

a. $\int_a^b x^n dx = [\frac{x^{n+1}}{n+1}]_a^b = \frac{b^{n+1}-a^{n+1}}{n+1}$, $n \neq -1$, $0 < a < b$,

b. $\int_0^\pi (\sin x)^2 dx = [\frac{x}{2} - \frac{1}{2}\sin(x)\cos(x)]_0^\pi = \frac{\pi}{2}$.

4.

$$g'(x) = (\arcsin(\sin(x))^7 \frac{d}{dx}\sin(x) = x^7\cos(x).$$

5.

$$h(x) = 1 - x^2 + o(x^3).$$

6.

$$\lim_{x\to 0} \frac{e^{2x} - 1 - 2x}{(\sin(x))^2} = \lim_{x\to 0} \frac{2x^2 + o(x^2)}{x^2 + o(x^2)} = \lim_{x\to 0} 2 + o(1) = 2.$$