MaPC1A - Partiel du 27-10-2021

①

$$\begin{array}{r|l} x^3 & x^2+5x+1 \\ \underline{x^3+5x^2+x} & \hline / \quad -5x^2-x & x-5 \\ \underline{-5x^2-25x-5} & \\ / \quad 24x+5 & \end{array}$$

$$x^3 = (x^2+5x+1)(x-5) + 24x+5$$

quotient : $x-5$
reste : $24x+5$

② $|x-1| + |x+5| = 6$

$x \geq 1$: $x-1 + |x+5| = 6$

$x \geq -5$; $x-1+x+5 = 6$
$2x = 2$
$\underline{x = 1}$

$x < -5$: $]-\infty, -5[\cap [1, +\infty[= \emptyset$

$x < 1$: $-x+1+|x+5| = 6$

$x \geq -5$: $-\cancel{x}+1+\cancel{x}+5 = 6$ ✓ $\underline{[-5, 1[}$

$x < -5$: $-x+1-x-5 = 6$
$x = -5$

SOLUTIONS : $x \in [-5, 1]$

(3)

a. $\lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{(5x^2-2)x^2}{(x-1)^2(3x^2+1)} = \lim\limits_{x\to-\infty} \dfrac{5-\frac{2}{x^2}}{(1-\frac{1}{x})^2(3+\frac{1}{x^2})} = \dfrac{5}{3}$

b. $\lim\limits_{x\to 1} (x-1)^2 = 0^+ \Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{1}{(x-1)^2} = +\infty$

$\Rightarrow \lim\limits_{x\to 1} \dfrac{(5x^2-2)x^2}{(x-1)^2(3x^2+1)} = (+\infty)\cdot\dfrac{3}{4} = +\infty$

c. $\lim\limits_{x\to 0} \dfrac{x}{\tan x} = \lim \dfrac{x\cdot\cos x}{\sin x} = 1$

(4)

a. $\ln(x+2)$ défini pour $x > -2$

$\sqrt{9-x^2}$ défini pour $9-x^2 \geq 0$

c-à-d $-3 \leq x \leq 3$

$D_a =]-2, 3]$ $a(x)$ dérivable sur D_a

$$a'(x) = \frac{1}{x+2} + \frac{1}{\cancel{2}}\frac{-\cancel{2}x}{\sqrt{9-x^2}}$$

b. $\ln(x)$ défini sur $x > 0$

$\ln(\ln(x))$ défini pour $\ln(x) > 0$ et $x > 0$

$D_b =]1, +\infty[$ $b(x)$ dérivable sur D_b

$$b'(x) = \frac{1}{\ln(x)}\cdot\frac{1}{x} = \frac{1}{x\ln(x)}$$

c. $D_c = \mathbb{R}$ $c(x)$ dérivable pour $x \neq 2$

$$c'(x) = \begin{cases} (e^{x-2})' & x \geq 2 \\ (e^{-x+2})' & x < 2 \end{cases} = \begin{cases} e^{x-2} & x \geq 2 \\ -e^{-x+2} & x < 2 \end{cases}$$

⑤ $g(x) = 7\arcsin(5x) + 2$

a. $\arcsin : [-1, 1] \to [-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}]$

$-1 \leq 5x \leq 1 \Rightarrow D_g = [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$

g dérivable sur D_g

b. $g'(x) = 7 \dfrac{1}{\cos(\arcsin(5x))} 5 = \dfrac{35}{\sqrt{1-25x^2}}$

$g'(x) > 0$ pour $x \in]-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}[$

$\Rightarrow g(x)$ strictement croissante

c. g str. croissante et continue

$\Rightarrow g\left([-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]\right) = [g(-\frac{1}{5}), g(\frac{1}{5})] = [-\frac{7\pi}{2}+2, \frac{7\pi}{2}+2]$

d. $y = 7\arcsin(5x) + 2 \Rightarrow x = \frac{1}{5}\sin\frac{y-2}{7}$

$\Rightarrow g^{-1}(y) = \frac{1}{5}\sin\left(\frac{y-2}{7}\right)$

$g^{-1} : [-\frac{7\pi}{2}+2, \frac{7\pi}{2}+2] \to [-\frac{1}{5}, \frac{1}{5}]$

image

6. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$

(a) f est dérivable en x_0

$$\Leftrightarrow \lim_{h \to 0} \frac{f(x_0+h) - f(x_0)}{h} \text{ existe } = l \in \mathbb{R}$$

(b)
$$f'(x_0) = \lim_{h \to 0} \frac{(x_0+h)^3 - x_0^3}{h} =$$

$$= \lim_{h \to 0} \frac{\cancel{x_0^3} + 3x_0^2 h + 3x_0 h^2 + h^3 - \cancel{x_0^3}}{h}$$

$$= 3x_0^2$$