

Examen du 7 janvier 2022, 13h00-15h00.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 6}{x - 1}.$$

- a. Donner le domaine de définition de f .
- b. Calculer les limites au bord du domaine de définition et en $\pm\infty$.
- c. Calculer la dérivée de f .
- d. Trouver tous les points critiques de f .
- e. Étudier le signe de la dérivée, trouver le sens de variation et les extrema de f .

2. Donner pour chacune des fonctions suivantes, une primitive sur un intervalle que l'on précisera :

- a. $x^2 e^{x^3}$,
- b. $x \ln(x)$.

Suggestion : dans le premier cas vous pouvez utiliser l'intégration par changement de variable, dans le deuxième l'intégration par parties.

3. Calculer les intégrales suivantes :

- a. $\int_a^b x^{-1} dx$, $0 < a < b$,
- b. $\int_{-\pi}^{\pi} x \cos(x) dx$.

4. Donner la dérivée de :

$$g(x) = \int_0^x \sin^3(t) dt.$$

5. Déterminer les trois premiers termes non nuls du polynôme de Taylor en 0 de la fonction définie par :

$$h(x) = x e^x + \sin x.$$

6. Calculer la limite suivante en utilisant les développements limités :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{e^{x/2} - 1 - x/2}{\cos(x) - 1}.$$