Fraction correspondant à un développement décimal périodique

vendredi 24 septembre 2021 13:52

Lorsque l'on a un nombre réel x avec un développement décimal de la forme

$$x = \pm c_n \dots c_0, d_1 \dots d_m \underbrace{\underbrace{l_1 \dots l_p}\, \underbrace{l_1 \dots l_p} \dots}_{\text{répétition de ce motif}}$$

on peut écrire x comme une fraction rationnelle avec la méthode suivante :

- multiplier x par 10^m et isoler la partie périodique

$$10^m x = \underbrace{\pm c_n \dots c_0 d_1 \dots d_m}_{\text{élément de } \mathbb{Z}} + 0, l_1 \dots l_p l_1 \dots l_p \dots$$

- calculer l'écriture de $y = 0, l_1 \dots l_p l_1 \dots l_p \dots$ en fraction

on a $10^p y = l_1 \dots l_p + 0, l_1 \dots l_p$

c'est-à-dire $10^p y = l_1 \dots l_p + y$

soit $y = \dfrac{l_1 \dots l_p}{10^p - 1}$

- on obtient donc $x = \dfrac{\pm c_n \dots c_0 d_1 \dots d_m + \frac{l_1 \dots l_p}{10^p - 1}}{10^m}$

(simplifier la fraction)

exemple : $x = 1,23111\dots$

$10^2 x = 123 + y$ où $y = 0,111\dots$

or $10 y = 1 + y$ d'où $y = \dfrac{1}{9}$

et $x = \dfrac{123 + \frac{1}{9}}{} = \dfrac{277}{}$

et $x = \dfrac{123 + \frac{1}{9}}{100} = \dfrac{277}{225}$

Négation d'une proposition logique

vendredi 24 septembre 2021 14:08

Prenons l'exemple de la proposition

ϕ = "pour tout entier naturel n, il existe un entier naturel m tel que $n \geq m^2$"

En notation formelle : $\phi = \forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n \geq m^2$

La négation de la proposition ϕ (notons-la $\neg \phi$) est déterminée de la manière suivante :

$$\neg \phi = \neg (\forall n \in \mathbb{N}, \exists m \in \mathbb{N}, n \geq m^2)$$

$$= \exists n \in \mathbb{N}, \neg (\exists m \in \mathbb{N}, n \geq m^2)$$

"il existe $n \in \mathbb{N}$ tel qu'il n'existe pas $m \in \mathbb{N}$ tel que $n \geq m^2$"

$$= \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, \neg (n \geq m^2)$$

"il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$, on n'a pas $n \geq m^2$"

$$= \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, n < m^2$$

"il existe $n \in \mathbb{N}$ tel que pour tout $m \in \mathbb{N}$, $n < m^2$"

On voit que les $\exists$ ont été changés en $\forall$ et réciproquement.

⚠ il serait faux de dire que la négation de ϕ est

$$\neg \phi = \forall n \in \mathbb{N}\ \exists m \in \mathbb{N}\ n < m^2$$

Raisonnement par équivalence

samedi 25 septembre 2021 19:50

Lorsqu'on fait un raisonnement du type :

$\phi_1 \Leftrightarrow \phi_2 \Leftrightarrow \dots \Leftrightarrow \phi_n$ où les ϕ_i sont des propositions logiques,

ce que ça veut dire est que ϕ_1 est vraie si et seulement si ϕ_n est vraie (c'est-à-dire : soit ϕ_1 et ϕ_n sont toutes les 2 vraies, soit ϕ_1 et ϕ_n sont toutes les 2 fausses).

Le but d'un raisonnement par équivalence est d'arriver à une proposition qui est évidemment vraie ou évidemment fausse. Par exemple, cherchons les solutions de l'équation

$$2x + 1 = 4\left(\frac{x}{2} + 1\right).$$

À $x \in \mathbb{R}$ fixé, on a les équivalences suivantes :

$$2x + 1 = 4\left(\frac{x}{2} + 1\right)$$

$\Leftrightarrow \quad 2x + 1 = 2x + 4$ retirer $2x$ des 2 côtés

$\Leftrightarrow \quad 1 = 4$

qui est évidemment faux.

On a donc montré que $\forall x \in \mathbb{R}$, $2x + 1 \neq 4\left(\frac{x}{2} + 1\right)$, en d'autres termes l'équation n'a pas de solution.

Raisonnement par l'absurde

samedi 25 septembre 2021 19:58

C'est un raisonnement du type $\phi_1 \Rightarrow \phi_2$ où l'on sait que ϕ_2 est fausse. On en déduit que ϕ_1 est fausse.

Ex : $\phi = \exists n \in \mathbb{N}, \forall m \in \mathbb{N}, m \leq n$

" il existe un entier naturel supérieur ou égal à tous les entiers naturels "

Pour montrer que ϕ est fausse : supposons qu'elle soit vraie.

Soit donc $n \in \mathbb{N}$ tel que $\forall m \in \mathbb{N}, m \leq n$

Alors $n+1 \geq n$, ce qui contredit sa ↑.

Donc ϕ est fausse.

Règles de manipulation des inéquations

samedi 25 septembre 2021 19:50

Soit $a, b, c \in \mathbb{R}$. On a les équivalences suivantes :

1. $a \leq b \iff a + c \leq b + c$
2. $a \leq b \iff a - c \leq b - c$ (appliquer 1 avec $-c$ à la place de c)
3. si $c > 0$: $a \leq b \iff ca \leq cb$

   si $c < 0$: $a \leq b \iff ca \geq cb$

Toutes ces équivalences restent vraies si on remplace tous les $\leq$ / $\geq$ par respectivement : $<$ ou $>$ ou $\geq$ / $>$ ou $<$ ou $\leq$

Inéquation linéaire

samedi 25 septembre 2021 19:49

Pour une inéquation de la forme

$$ax+b \leq cx+d \quad \text{avec } a,b,c,d \in \mathbb{R}$$

Mettre les termes en x du même côté, les termes constants de l'autre :

$$ax - cx \leq d-b$$

$$\Leftrightarrow (a-c)x \leq d-b$$

puis, si $a-c > 0$: c'est équivalent à $x \leq \frac{d-b}{a-c}$

si $a-c < 0$: ——— $x \geq \frac{d-b}{a-c}$

(pour $<$ ou $>$ ou $\geq$, à la place de $\leq$, c'est similaire)

ex :

- $2x-1 \leq x+3$

$\Leftrightarrow 2x - x \leq 3+1$

$\Leftrightarrow x \leq 4$

- $x+3 \leq 3x+1$

$\Leftrightarrow -2x \leq -2$

$\Leftrightarrow x \geq 1$

Inéquations polynomiale d'ordre 2

samedi 25 septembre 2021 20:13

C'est une inéquation du type
$f(x) \geq g(x)$ où f, g sont des fonctions polynomiales,
au moins l'une d'entre elles étant de degré 2.

Pour résoudre : ça revient à $f(x) - g(x) \geq 0$.
Calculer les racines de $f(x) - g(x)$ et faire un tableau de signe.

ex :
$$x^2 + x \geq 4x - 2$$
$$\Leftrightarrow x^2 - 3x + 2 \geq 0$$
Les racines sont 1 et 2.

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x^2 - 3x + 2$		+	0	−	0	+	

d'où la solution de l'inéquation est
$$x \in \left]-\infty, 1\right] \cup \left[2, +\infty\right[$$
(à adapter lorsqu'on a $<$ ou $>$ ou $\leq$ à la place de $\geq$)

Rappel : Un polynôme $f(x) = ax^2 + bx + c$ $(a \neq 0)$
a pour racines x_1, x_2 si et seulement si
$$f(x) = a(x - x_1)(x - x_2)$$
Remarque : ceci donne le tableau de signes, ex :

$g(\dots$

Remarquez que ça donne le tableau de signes, ici :

$f(x) = x^2 - 3x + 2 = (x-1)(x-2)$

x	$-\infty$		1		2		$+\infty$
$x-1$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-2$		$-$		$-$	0	$+$	
$f(x)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

Inéquation rationnelle

samedi 25 septembre 2021 20:22

C'est une inéquation du type

$$\frac{f(x)}{g(x)} \geq \frac{h(x)}{k(x)}$$ où f, g, h, k sont des fonctions polynomiales.

Pour résoudre :

- méthode 1 : tout mettre du même côté et mettre au même dénominateur

⚠ ne pas développer le dénominateur !! C'est beaucoup plus pratique de le garder sous forme factorisée. En fait, factoriser $g(x)$ et $k(x)$ avant toute chose pour voir leurs facteurs communs.

$$\frac{f(x)}{g(x)} - \frac{h(x)}{k(x)} \geq 0$$

ex : $\frac{1}{x} \geq \frac{2x+1}{x^2-x}$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} \geq \frac{2x+1}{x(x-1)}$$

$$\Leftrightarrow \frac{1}{x} - \frac{(2x+1)}{x(x-1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{x-1-2x-1}{x(x-1)} \geq 0$$

$$\Leftrightarrow \frac{-x-2}{x(x-1)} \geq 0$$

Une fois qu'on s'est ramené à une équation de la forme $\frac{r(x)}{q(x)} \geq 0$ où r et q n'ont pas de facteurs en commun, on fait un

p et q n'ont pas de facteur en commun, on fait un tableau de signes.

ex : $\dfrac{-x-2}{x(x-1)} \geq 0$

x	$-\infty$		-2		0		1		$+\infty$
$-x-2$		$+$	0	$-$		$-$		$-$	
x		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$\dfrac{-x-2}{x(x-1)}$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$+$	$\Vert$	$-$	

d'où la solution est

$x \in]-\infty,-2] \cup]0,1[$

- méthode 2 : se ramener à une équation sans dénominateur en multipliant par le PPCM de $g(x)$ et $k(x)$

MAIS ATTENTION : pour les x pour lesquels ce PPCM est négatif, on change le sens de l'inéquation !!! (règle ③ de manipulation d'inéquations)

ex : $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{2x+1}{x(x-1)}$

$\text{PPCM}(x, x(x-1)) = x(x-1)$ (et non $x \times x(x-1)$ puisqu'il y a le facteur x en commun)

$$\iff \begin{cases} x(x-1) > 0 \ \boxed{\text{et}} \ x-1 \geq 2x+1 \\ \text{ou} \quad x(x-1) < 0 \ \boxed{\text{et}} \ x-1 \leq 2x+1 \end{cases}$$

x	$-\infty$		0		1		$+\infty$
x		$-$	0	$+$		$+$	
$x-1$		$-$		$-$	0	$+$	
$x(x-1)$		$+$	0	$-$	0	$+$	

$x \in]-\infty,0[\cup]1,+\infty[$:

$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[: \\ \boxed{\text{et}} \ x \leq -2 \\ \text{ou} \quad x \in]0, 1[\\ \boxed{\text{et}} \ x \geq -2 \end{cases}$

$\Leftrightarrow x \in \left(\left(]-\infty, 0[\cup]1, +\infty[\right) \cap]-\infty, -2]\right)$

$\cup \left(]0, 1[\cap [-2, +\infty[\right)$

$\Leftrightarrow x \in]-\infty, -2] \cup]0, 1[$

Inéquations/équations faisant intervenir une valeur absolue

samedi 25 septembre 2021 20:46

Rappel: la valeur absolue est définie par

$$|a| = \begin{cases} a & \text{si } a \geq 0 \\ -a & \text{si } a \leq 0 \end{cases}$$

Un terme de la forme $|f(x)|$ est difficile à manipuler directement dans une équation / inéquation. On se ramène à deux équations / inéquations suivant le signe de $f(x)$ (qui va dépendre de la valeur de x).

ex: $|2x+1| = 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} 2x+1 \geq 0 \ \boxed{\text{et}} \ 2x+1 = 1 \\ \text{ou} \ 2x+1 \leq 0 \ \boxed{\text{et}} \ -2x-1 = 1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\ \boxed{\text{et}} \ x = 0 \\ \text{ou} \ x \in \left]-\infty, -\frac{1}{2}\right] \ \boxed{\text{et}} \ x = -1 \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow x \in \left(\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[\cap \{0\}\right) \cup \left(\left]-\infty, -\frac{1}{2}\right[\cap \{-1\}\right)$$

$$\Leftrightarrow x \in \{0, -1\}.$$

- S'il y a plusieurs valeurs absolues, on doit considérer toutes les combinaisons possibles de signes.

ex: $|x+1| = |x-1| + 1$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x+1 \geq 0 \ \boxed{\text{et}} \ x-1 \geq 0 \ \boxed{\text{et}} \ x+1 = x \Leftrightarrow x \in \emptyset \\ \text{ou} \ x+1 \geq 0 \ \boxed{\text{et}} \ x-1 \leq 0 \ \boxed{\text{et}} \ x+1 = -x+2 \Leftrightarrow x = 1/2 \\ \text{ou} \ x+1 \leq 0 \ \boxed{\text{et}} \ x-1 \geq 0 \ \boxed{\text{et}} \ -x-1 = x \Leftrightarrow x = -1/2 \\ \text{ou} \ x+1 \leq 0 \ \boxed{\text{et}} \ x-1 \leq 0 \ \boxed{\text{et}} \ -x-1 = -x+2 \Leftrightarrow x \in \emptyset \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x+1>0 \text{ et } x-1>0 \text{ et } \dots & \to x\in\emptyset \\ \text{ou } x+1\leq 0 \text{ et } x-1\geq 0 \text{ et } -x-1 = \dots \text{[illegible]} \\ \text{ou } x+1\leq 0 \text{ et } x-1\leq 0 \\ \text{ou } x+1\geq 0 \end{cases}$$

$$\Longleftrightarrow x\in\left(]-1,+\infty[\,\cap\,]-\infty,1]\,\cap\,\{1/2\}\right)$$
$$\cup\left(]-\infty,-1]\,\cap\,]1,+\infty[\,\cap\,\{-1/2\}\right)$$

$$\Longleftrightarrow x\in\left\{\frac{1}{2}\right\}$$

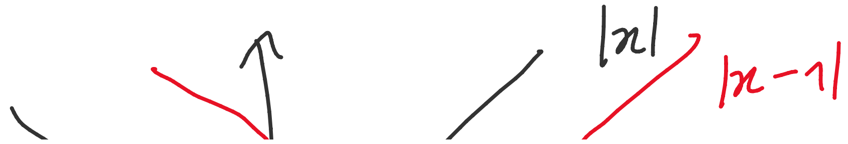
- Autre ex: $|x| > |x-1|$

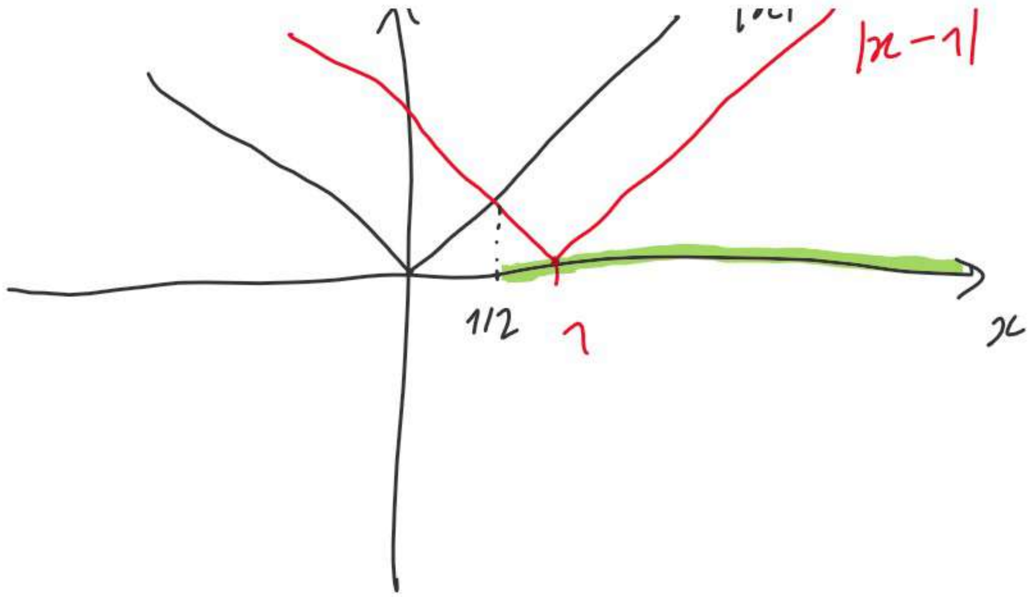
$$\Longleftrightarrow \begin{cases} x\in\,]-\infty,0[\text{ et } -x > -x+1 & \Leftrightarrow x\in\emptyset \\ \text{ou } x\in[0,1[\text{ et } x > -x+1 & \Leftrightarrow x\in\,]\tfrac{1}{2},+\infty[\\ \text{ou } x\in[1,+\infty[\text{ et } x > x-1 & \Leftrightarrow x\in\mathbb{R} \end{cases}$$

↓ on peut directement considérer tous les intervalles entre les points où x ou $x-1$ changent de signe

$$\Longleftrightarrow x\in\left([0,1[\,\cap\,]\tfrac{1}{2},+\infty[\right)\cup[1,+\infty[$$
$$\Longleftrightarrow x\in\,]\tfrac{1}{2},+\infty[$$

Remarque: on peut directement le lire sur le graphe




|x|
|x-1|
1/2
1
x

Racines de polynômes

lundi 27 septembre 2021 19:23

On a le théorème suivant: soit P un polynôme. Soit $a \in \mathbb{R}$ (même $a \in \mathbb{C}$ fonctionne), alors a est racine de P (c'est-à-dire $P(a) = 0$) si et seulement si $(x-a)$ divise $P(x)$ (c'est-à-dire : il existe un polynôme Q tel que $\forall x \in \mathbb{R}$, $P(x) = (x-a)Q(x)$).

Ex: $P(x) = x^3 - 2x^2 - x + 2$

Est-ce que x divise $P(x)$? Clairement pas: $P(0) = 2 \neq 0$.

$(x-1)$? Oui: $P(1) = 1 - 2 - 1 + 2 = 0$

Maintenant, pour trouver Q tel que $P(x) = (x-1)Q(x)$:

posons $Q(x) = ax^2 + bx + c$ (on sait que Q doit être de degré $3 - 1 = 2$)

et résolvons $x^3 - 2x^2 - x + 2 = (x-1)(ax^2 + bx + c)$

Or $(x-1)(ax^2+bx+c) = ax^3 + (b-a)x^2 + (c-b)x - c$

donc l'équation revient à $\begin{cases} a = 1 \\ b - a = -2 \\ c - b = -1 \\ -c = 2 \end{cases}$ en identifiant les coefficients.

En d'autres termes: $\begin{cases} a = 1 \\ b = a - 2 = -1 \\ c = b - 1 = -2 \\ -c = 2 \text{ (OK: c'est cohérent)} \end{cases}$

c'est-à-dire:

$Q(x) = x^2 - x - 2$

Division de polynômes

lundi 27 septembre 2021 19:34

On considère deux polynômes P et Q avec $Q \neq 0$.
Alors : il existe un unique couple de polynômes D, R tels que $\deg R < \deg Q$ et

$$\forall x \in \mathbb{R}, \quad P(x) = D(x)\,Q(x) + R(x).$$

Pour trouver D et R, on peut poser une division comme dans l'exemple suivant.

ex : $P(x) = x^3 - x^2 + 2x + 1$

$Q(x) = x + 3$

$$
\begin{array}{rrrr|l}
x^3 & -\,x^2 & +\,2x & +\,1 & x+3 \\
\hline
-(x^3 & +\,3x^2) & & & 1x^2 - 4x + 14 \\
\cline{1-4}
 & -4x^2 & +\,2x & +\,1 & \textcircled{1}\quad \textcircled{2}\quad \textcircled{3} \\
 & -(-4x^2 & -\,12x) & & \\
\cline{2-4}
 & & 14x & +\,1 & \\
 & & -(14x & +\,42) & \\
\cline{3-4}
 & & & -41 &
\end{array}
$$

① $x^2(x+3)$

② $-4(x+3)$

③ $14(x+3)$

On choisit les coefficients en ①, ②, ③ de manière à se débarrasser du monôme de plus haut degré jusqu'à atteindre le reste de degré $< \deg(x+3) = 1$.

Donc $P(x) = (x^2 - 4x + 14)\,Q(x) - 41$