Fiche méthode
TD 2

• **Domaine de définition, ensemble image, graphe de fonction, etc.**

(exos 20, 21, 22, 23)

- Une fonction $f: I \to J$ où I est un sous-ensemble de $\mathbb{R}$ (et J aussi) associe à chaque $x \in I$ un nombre $f(x) \in J$.

Lorsqu'on a deux fonctions $f: I \to J$, $g: K \to L$, on peut définir la composée $g \circ f: I \to L$ à condition que $J \subset K$, par $(g \circ f)(x) = \boxed{g(f(x))}$

(c'est-à-dire : g est définie sur toutes les valeurs que peut prendre f).

Également, si $f: I \to \mathbb{R}$, $g: J \to \mathbb{R}$, $f+g$, fg, etc. ne sont définies que sur $I \cap J$.

Tout ça pour dire qu'il faut faire attention aux domaines de définition.

- ex : 20) b) $f(y) = \frac{1}{y} + 5$. 5 est défini sur tout $\mathbb{R}$, $\frac{1}{y}$ est défini pour $y \in \mathbb{R}^*$

donc $f(y)$ est défini pour $y \in \mathbb{R}^* \cap \mathbb{R} = \mathbb{R}^*$: $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}^*$

20) g) $f(u) = \ln(u-1)$. $\ln(x)$ est défini lorsque $x > 0$,

donc $\ln(u-1)$ est défini lorsque $u - 1 > 0$, c'est-à-dire $u > 1$.

Donc $\mathcal{D}_f =]1, +\infty[$

22) g) $f(x) = \sqrt{x^2 + x + 1}$. On a $\underbrace{1 \times x^2 + x + 1}$ > 0 pour tout $x \in \mathbb{R}$, vu que $\Delta = 1 - 4 \times 1 = -3 < 0$ et le coefficient dominant est positif. Donc $\sqrt{x^2+x+1}$ est défini pour tout $x \in \mathbb{R}$, et $\mathcal{D}_f = \mathbb{R}$.

- Pour le calcul de composées, prenons l'exemple suivant :

$f(x) = 2x^2 - 3$, $g(y) = \frac{1}{y} + 5$:

alors $f(g(y)) = 2g(y)^2 - 3 = 2\left(\frac{1}{y} + 5\right)^2 - 3 = 2\left(\frac{1}{y^2} + \frac{10}{y} + 25\right) - 3$

$= \frac{2}{y^2} + \frac{20}{y} + 47$

f est définie sur tout $\mathbb{R}$ et $g(y)$ est définie pour $y \in \mathbb{R}^*$ d'où

$\mathcal{D}_{f \circ g} = \mathbb{R}^*$.

On remplace simplement x par $g(y)$ dans $f(x)$ pour obtenir $f(g(y))$.

- L'ensemble image de $f : I \to J$ est

$$\mathrm{Im}(f) = \{ y \in J \mid \exists x \in I \text{ tel que } f(x) = y \}$$

c'est-à-dire l'ensemble des valeurs que peut prendre f.

ex : 20)a) $f(x) = 2x^2 - 3$. Déjà, on voit que pour tout $x \in \mathbb{R}$

$f(x) = \underbrace{2x^2}_{\geq 0} - 3 \geq 0 - 3 = -3$ d'où toutes les valeurs que prend f

sont ≥ -3, c'est-à-dire $\mathrm{Im}(f) \subset [-3, +\infty[$.

Puis : toute valeur $y \geq -3$ est atteinte par f puisque

l'équation $f(x) = y$ équivaut à $2x^2 = y+3 \iff x^2 = \frac{y+3}{2}$ → ≥ 0 car $y \geq -3$

$\iff x = \pm\sqrt{\frac{y+3}{2}}$

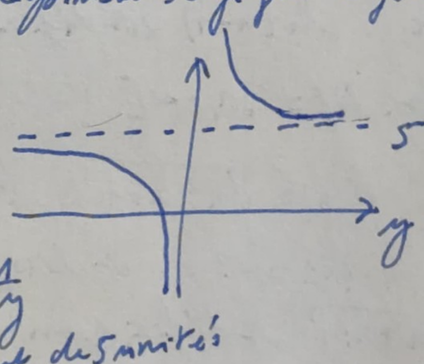
et a donc des solutions. Ce qui prouve $[-3, +\infty[\subset \mathrm{Im}(f)$,

et ainsi $\mathrm{Im}(f) = [-3, +\infty[$.

- Le graphe d'une fonction $f : I \to J$ est $\Gamma(f) = \{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \mid x \in I, y \in J \text{ et } f(x) = y\}$.

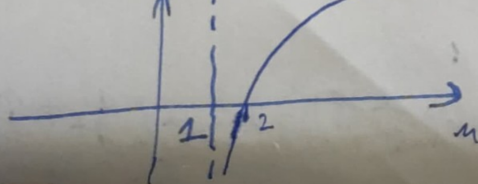
Pour connaître le graphe : il faut connaître les variations de f, et quelques valeurs de f en des valeurs bien choisies (par exemple : $f(0)$ donne le point d'intersection du graphe avec l'axe des ordonnées ; les zéros de f donnent les points d'intersection avec l'axe des abscisses).

Parfois, on peut déduire le graphe de f en déformant le graphe de fonctions élémentaires. ex : 20)b) $f(y) = \frac{1}{y} + 5$



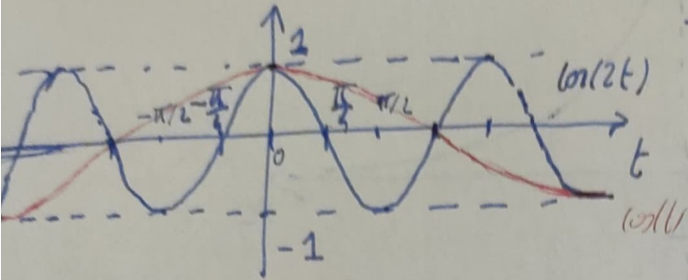
On a juste décalé le graphe de $\frac{1}{y}$ vers le haut de 5 unités

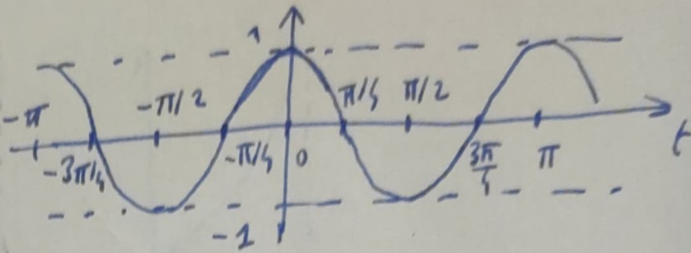
20)g) $f(x) = \ln(x-1)$



On a juste décalé le graphe de $\ln(x)$ de 1 unité vers la droite.

20) b) $f(t) = \cos(2t)$

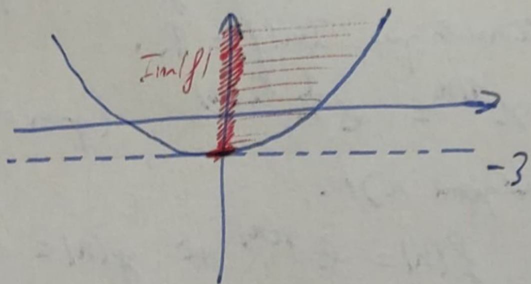




↳ on contracte simplement l'axe des coordonnées par un facteur 2 par rapport au graphe de $\cos(t)$.

- À partir du graphe d'une fonction on peut lire l'ensemble image : c'est la projection du graphe sur l'axe des ordonnées. ex: 20) a)

| $Im(f) = [-3, +\infty[$



$f(x) = 2x^2 - 3$

- Exemple complet:

22) f) $f(x) = \frac{x}{x^2-4}$. $f(x)$ est définie lorsque $x^2 - 4 \neq 0$, c'est-à-dire $x^2 \neq 4$, soit $x \neq \pm 2$.. Donc $D_f =]-\infty, -2[\cup]-2, 2[\cup]2, +\infty[$

Puis: $f'(x) = \frac{1 \times (x^2-4) - x \times 2x}{(x^2-4)^2} = \frac{-(x^2+4)}{(x^2-4)^2} < 0$ donc f est strictement décroissante (sur chaque intervalle). Et $f(x) \xrightarrow[x \to \pm\infty]{} 0$, car $f(x) = \frac{x}{x^2(1-\frac{4}{x^2})} = \frac{1}{x(1-\frac{4}{x^2})}$ quand $x \neq 0$.

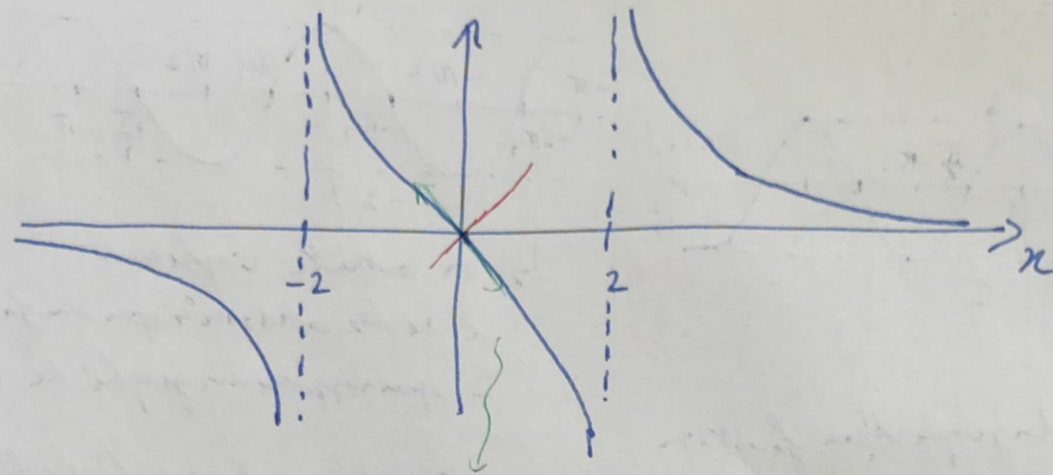
De plus $f(x) \xrightarrow[x \to (-2)^-]{} -\infty$ car $x^2 - 4 \xrightarrow[x \to (-2)^-]{} 0^+$, et $x \xrightarrow[x \to (-2)^-]{} -2$.

$f(x) \xrightarrow[x \to (-2)^+]{} +\infty$ car $x^2 - 4 \xrightarrow[x \to (-2)^+]{} 0^-$ et $x \xrightarrow[x \to (-2)^+]{} -2$

$f(x) \xrightarrow[x \to 2^-]{} -\infty$ car $x^2 - 4 \xrightarrow[x \to 2^-]{} 0^-$ et $x \xrightarrow[x \to 2^-]{} 2$

$f(x) \xrightarrow[x \to 2^+]{} +\infty$ car $x^2 - 4 \xrightarrow[x \to 2^+]{} 0^+$ et $x \xrightarrow[x \to 2^+]{} 2$

Pour faire le graphe : il est utile de remarquer que $f(0) = 0$ et que 0 est le seul zéro de f. On peut également remarquer que f est impaire.



on utilise $f'(0) = -1$ pour la pente en $x = 0$

On lit directement que $\mathrm{Im}(f) = \mathbb{R}$.

22) b) $f(x) = x^{1/x} = e^{\frac{1}{x}\ln(x)}$ (par définition de x^{α} pour $x>0$, $\alpha \in \mathbb{R}$)

qui est défini pour $x > 0$.

Maintenant : $f(x) = e^{g(x)}$ où $g(x) = \frac{\ln(x)}{x}$,

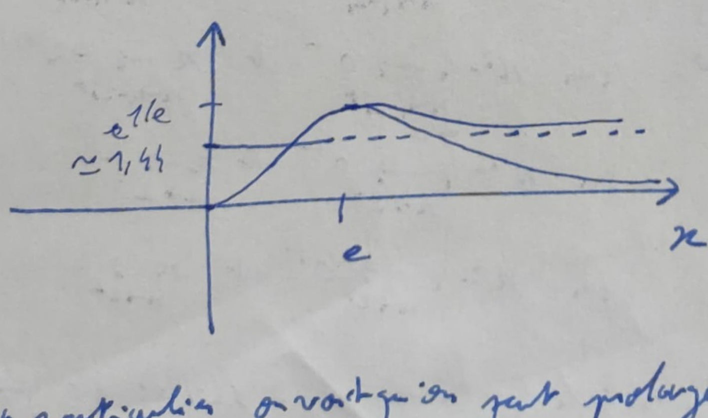
et $g'(x) = \dfrac{\frac{1}{x} \times x - \ln(x)}{x^2} = \dfrac{1 - \ln(x)}{x^2}$.

x	0		e		$+\infty$
$g'(x)$		$+$	0	$-$	
$g(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	$1/e$	$\searrow$	0
$f(x)$	0	$\nearrow$	$e^{1/e}$	$\searrow$	1

on utilise que exp est strictement croissante

$g(x) \xrightarrow[x \to 0^+]{} -\infty$ car $\frac{-\infty}{0^+} = -\infty$

$g(x) \xrightarrow[x \to +\infty]{} 0$, propriété connue



En particulier on voit qu'on peut prolonger par continuité D_f à $[0, +\infty[$; on lit que $\mathrm{Im}(f) = [0, e^{1/e}]$

si on prolonge par continuité en 0

- Fonctions paires, impaires, périodiques etc. (exos 20 à 30)

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$ où $I \subset \mathbb{R}$ est tel que si $x \in I$, alors $-x \in I$ (typiquement : $I = \mathbb{R}$). On dit que f est paire si $\forall x \in I$, $f(-x) = f(x)$; f est impaire si $\forall x \in I$, $f(-x) = -f(x)$.

On a la propriété suivante : ~~toute tel f~~ $f : I \to \mathbb{R}$ s'écrit de manière unique comme $f = g + h$ où $g, h : I \to \mathbb{R}$ et g paire, h impaire.

On a même $g(x) = \dfrac{f(x) + f(-x)}{2}$, $h(x) = \dfrac{f(x) - f(-x)}{2}$.

Faire le 25) pour voir les propriétés de combinaison des fonctions paires/impaires.

- Une fonction $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ est T-périodique (où $T > 0$) si $\forall x \in \mathbb{R}$, $f(x+T) = f(x)$. Une conséquence immédiate est que

$$f(x + kT) = f(x) \quad \forall x \in \mathbb{R}, \forall k \in \mathbb{Z}.$$

On appelle la période de f le plus petit $T > 0$ tel que f est T-périodique. On appelle une période de f un $T > 0$ tel que f est T-périodique.

Théorème : Soit f continue, non constante et T-périodique ($T > 0$). Alors la période de f, T_f, existe, et il existe $n \in \mathbb{N}^*$ tel que $T = n T_f$.

Dans la suite : on suppose f, g continues non constantes.

- Si f est T-périodique, g est T'-périodique et $\frac{T}{T'} \in \mathbb{Q}$, alors $f+g$ est périodique. En effet, on peut écrire $\frac{T}{T'} = \frac{p}{q}$ où $p, q \in \mathbb{N}^*$ (p, q premiers entre eux) et $qT = pT' = T''$. Alors $f+g$ est T''-périodique. De plus, si T est la période de f, T' la période de g, alors T'' est la période de $f+g$. [preuve avec transformée de Fourier]

- Si f est T-périodique, g est T'-périodique et $T/T' \notin \mathbb{Q}$, alors $f+g$ n'est pas périodique.

[il y a une preuve avec la transformée de Fourier].

- <u>Fonctions injectives, surjectives, bijectives etc.</u> (exos 31, 32, 33)

Voir les définitions dans votre cours.

⚠ Si $f : I \to J$, la définition d'injectivité ne dépend pas de J (si on considère $f : I \to \mathbb{R}$, ça revient au même)

MAIS la définition de surjectivité dépend de J :

par exemple $\sin : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ n'est pas surjective (car $\mathrm{Im}(\sin) = [-1, 1]$).

mais $\sin : \mathbb{R} \to [-1, 1]$ est surjective.

Pour prouver qu'une fonction $f : I \to J$ est bijective et que sa réciproque est g : faire un raisonnement de la forme

$\forall x \in I, \forall y \in J, \quad f(x) = y \iff \dots \iff x = g(y)$.

ex : $g(x) = \sqrt{2x+1}$, $D_g = [-\frac{1}{2}, +\infty[$, $\mathrm{Im}(g) = [0, +\infty[$

et $\forall x \in [-\frac{1}{2}, +\infty[$, $\forall y \in [0, +\infty[$:

$$\sqrt{2x+1} = y \iff 2x+1 = y^2 \iff x = \frac{y^2-1}{2}$$

(car $2x+1$ et $y \geq 0$)

donc g est bijective de $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ dans $[0, +\infty[$ et sa réciproque est $g^{-1}(y) = \frac{y^2-1}{2}$.