

*Définition de fonction. Domaine de définition. Graphe. Ensemble image. Somme, produit, quotient, composition de fonctions.*

**20.** À partir du graphe des fonctions élémentaires, donner le domaine de définition et dessiner le graphe des fonctions suivantes :

- a.  $2x^2 - 3$ ,    b.  $\frac{1}{y} + 5$ ,    c.  $1 - \sqrt{z}$ ,    d.  $t^3 + 1$ ,    e.  $2 \sin \theta - 1$ ,    f.  $e^{2x}$ ,    g.  $\ln(u - 1)$ ,  
 h.  $\frac{2}{x-1}$ ,    i.  $2 \arcsin(y)$ ,    j.  $\arctan(z) + 5$ ,    k.  $\ln(3x)$ ,    l.  $\cos(2t)$ .

**21.** Soient  $f(x) = 2x^2 - 3$ ,  $g(y) = \frac{1}{y} + 5$  et  $h(z) = 1 - \sqrt{z}$ . Calculer les fonctions composées suivantes :

- a.  $f(g(y))$ ,    b.  $g(f(x))$ ,    c.  $g(h(z))$ ,    d.  $h(f(x))$ ,    e.  $f(h(g(y)))$ .

**22.** Donner le domaine de définition et l'ensemble image des fonctions suivantes :

- a.  $e^x + x^2$ ,    b.  $x^{-n}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,    c.  $\sqrt[n]{x}$ ,  $n \in \mathbb{N}^*$ ,    d.  $\sin(x)$ ,    e.  $\ln(x)$ ,    f.  $\frac{x}{x^2 - 4}$ ,  
 g.  $\sqrt{x^2 + x + 1}$ ,    h.  $x^{1/x}$ .

**23.** Trouver l'ensemble de définition des fonctions suivantes :

- a.  $\frac{x^2 + 2x - 1}{x^2 - 2x + 1}$ ,    b.  $\sqrt{y^3 - 8} + \sqrt{y^3 + 8}$ ,    c.  $\ln(z + 5)$ ,    d.  $\ln \sqrt{t^2 - 4}$ ,    e.  $\frac{1}{\sin \theta}$ ,  
 f.  $\arctan(1/x)$ ,    g.  $\ln(\tan u)$ ,    h.  $\sqrt{1 - x^2}$ ,    i.  $\arcsin\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)$ .

*Fonctions paires, impaires, périodiques. Fonctions bornées, monotones.*

**24.** Déterminer si les fonctions suivantes sont paires ou impaires :

- a.  $3x^6 + 2x^2$ ,    b.  $\frac{\tan x - x}{x^3 \cos x}$ ,    c.  $\frac{\sin^2(2x) - \cos(3x)}{\tan x}$ ,    d.  $\frac{x-1}{\sin(x+1)} + \cos x$ .

**25.** Soient  $f, g : \mathbb{R} \rightarrow \mathbb{R}$  deux fonctions paires. Que peut-on dire sur la parité de la somme  $f + g$ , du produit  $fg$ , et de la composée  $f \circ g$ ? Et si  $f, g$  sont impaires? Et si l'une est paire et l'autre impaire?

**26.** Déterminer si les fonctions suivantes sont périodiques :

- a.  $\cos^2(3x)$ ,    b.  $3 \cos(x^2)$ ,    c.  $3 \sin(x/2) + 2 \sin(x/3)$ ,    d.  $\sin(x) + 2 \cos(\sqrt{2}x)$ .

**27.** Soient  $f$  et  $g$  deux fonctions réelles définies sur  $\mathbb{R}$  et périodiques de période  $n$  et  $m$  respectivement où  $n, m \in \mathbb{N}^*$ . Montrer que la somme  $f + g$  est une fonction périodique.

**28.** Montrer que la fonction  $f(x) = -1 + \frac{2x^2}{x^2 + 1}$  est bornée, car majorée par 1 et minorée par -1. Montrer qu'elle est aussi majorée par la fonction  $g(x) = x^2$ .

**29.** Soit  $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$ . Montrer que  $|f(x)|$  est majorée par  $\frac{1}{2}$ .

**30.** La fonction  $\frac{1}{x}$  est-elle monotone sur  $] -\infty, 0[$ ? Et sur  $]0, +\infty[$ ? Et sur  $\mathbb{R} \setminus \{0\}$ ?

*Fonctions injectives, surjectives et bijectives. Fonction réciproque.*

**31.** Montrer que la fonction  $g(x) = \sqrt{2x+1}$  est bijective et trouver sa fonction réciproque  $g^{-1}(y)$ .

**32.** Calculer la réciproque des fonctions de l'exercice 20.

**33.** Calculer les valeurs suivantes :

a.  $\arcsin(1/2)$ ,    b.  $\arctan(\sqrt{3}/3)$ ,    c.  $\arcsin(-\sqrt{3}/2)$ ,    d.  $\arctan(-1)$ ,  
e.  $\arcsin(\sin(2\pi/3))$ ,    f.  $\arctan(\tan(9\pi/4))$ ,    g.  $\sin(\arcsin(\sqrt{2}/\sqrt{5}))$ ,    h.  $\tan(\arctan(3))$ .