lundi 18 octobre 2021 13:11

Exo 43 TD 2.2

On va partir de l'inégalité

$|\sin(x)| \leq |x|$ ($\forall x \in \mathbb{R}$) et déduire la continuité de $\sin$ et $\cos$ en 0. (on utilisera aussi les formules pour $\cos(a+b)$ et $\sin(a+b)$)

— On a $0 \leq |\sin(x)| \leq |x|$ $\forall x \in \mathbb{R}$ d'où, par le théorème des gendarmes, comme $\begin{cases} |x| \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \\ 0 \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \end{cases}$

on a $|\sin(x)| \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

d'où $\sin(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = \sin(0)$: $\sin$ est continue en 0.

— On a $\cos(2x) = 1 - 2\sin(x)^2$

d'où $\cos(x) = 1 - 2\sin\left(\frac{x}{2}\right)^2$

Puis : $\frac{x}{2} \xrightarrow[x \to 0]{} 0$ d'où $\sin\left(\frac{x}{2}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0$

(en utilisant que $\sin$ est continue en 0)

d'où $\cos(x) \xrightarrow[x \to 0]{} 1 - 2 \times 0^2 = 1 = \cos(0)$.

D'où $\cos$ est continue en 0.

— Enfin, soit $a \in \mathbb{R}$. Alors :

- $\sin(x) = \sin(a + (x-a))$

$$= \sin(a)\underbrace{\cos(x-a)}_{\substack{\longrightarrow 1 \\ x \to a}} + \cos(a)\underbrace{\sin(x-a)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ x \to a}} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \sin(a)$$

en utilisant cos et sin continues en 0.

- $\cos(x) = \cos(a + (x-a))$

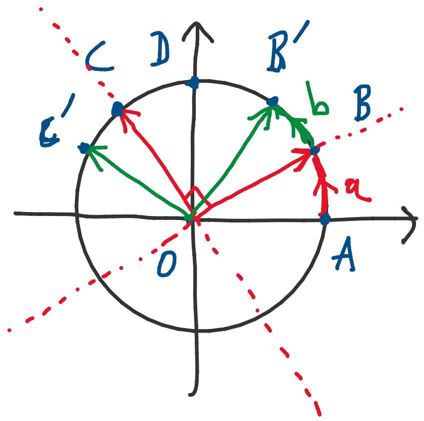
$$= \cos(a)\underbrace{\cos(x-a)}_{\substack{\longrightarrow 1 \\ x \to a}} - \sin(a)\underbrace{\sin(x-a)}_{\substack{\longrightarrow 0 \\ x \to a}} \underset{x \to a}{\longrightarrow} \cos(a)$$

de même

Donc cos, sin sont continues.

lundi 18 octobre 2021 13:25

- Maintenant, ce que l'on a utilisé sur cos et sin peut se montrer sans utiliser que cos et sin sont continues (ou dérivables).



Par exemple, nous montrer que

$$\begin{cases} \cos(a+b) = \cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b) \\ \sin(a+b) = \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \end{cases}$$

on peut faire ça avec les vecteurs :

- on a $\overrightarrow{OB} = \cos(a) \times \overrightarrow{OA} + \sin(a) \times \overrightarrow{OD} = \begin{pmatrix} \cos(a) \\ \sin(a) \end{pmatrix}$

(on projette $\overrightarrow{OB}$ sur les axes noirs)

et $\overrightarrow{OC} = -\sin(a) \times \overrightarrow{OA} + \cos(a) \times \overrightarrow{OD}$
$= \begin{pmatrix} -\sin(a) \\ \cos(a) \end{pmatrix}$

(de même)

- similairement $\overrightarrow{OB'} = \begin{pmatrix} \cos(a+b) \\ \sin(a+b) \end{pmatrix}$

mais on a un autre moyen de le calculer

mais on a un autre moyen de le calculer en projetant sur les axes rouges :

$$\vec{OB'} = \cos(b) \times \vec{OB} + \sin(b) \times \vec{OC}$$
$$= \cos(b)\begin{pmatrix}\cos(a)\\ \sin(a)\end{pmatrix} + \sin(b)\begin{pmatrix}-\sin(a)\\ \cos(a)\end{pmatrix}$$
$$= \begin{pmatrix}\cos(a)\cos(b) - \sin(a)\sin(b)\\ \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b)\end{pmatrix}$$

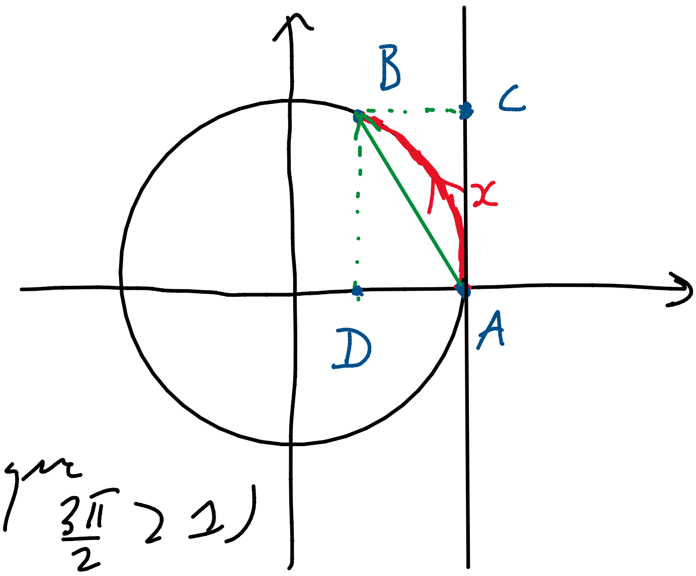
d'où les égalités.

- Pour $|\sin(x)| \leq |x|$:

il suffit de montrer $\sin(x) \leq x$ pour $x \geq 0$ (car sin est impaire),

et même pour $x \in [0, \frac{\pi}{2}]$

(facile à montrer sachant que $\frac{3\pi}{2} > 1$)



On a $AC = \sin(x)$

et $AC \leq \sqrt{AC^2 + AD^2} = AB$.

Mais $AB \leq x$ car la ligne droite est le plus court chemin entre deux points, et on

court chemin entre [illegible]
a un chemin courbe entre A et B (l'arc de cercle $\overset{\frown}{AB}$) qui est de longueur x.

D'où $\sin(x) \leq x$.