Règles générales de calcul de limites

lundi 18 octobre 2021 15:21

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$, $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l'$ alors $(l, l' \in \mathbb{R})$

($a \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ on remplace a par a^+ ou a^- où $a \in \mathbb{R}$)

  - $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l + l'$
  - $f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} ll'$
  - si $l' \neq 0$: $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \dfrac{l}{l'}$
  - si $l' = 0^+$ et :
    - $l > 0$: alors $\dfrac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$
    - $l < 0$: ~~~~~~ $-\infty$
  - si $l' = 0^-$ et :
    - $l > 0$: ~~~~~~ $-\infty$
    - $l < 0$: ~~~~~~ $+\infty$
  - si $l = l' = 0$: $\dfrac{f(x)}{g(x)}$ forme indéterminée quand $x \to a$.

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$ et g est continue en l : $(l \in \mathbb{R})$

$$g(f(x)) \underset{x\to a}{\longrightarrow} g(l)$$

(mêmes hypothèses sur a que plus haut)

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$:

alors $f(x) + g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$ et $f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$

$\dfrac{f(x)}{g(x)}$ forme indéterminée quand $x \to a$.

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$:

$f(x)+g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$, $f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$

$\frac{f(x)}{g(x)}$ forme indéterminée quand $x\to a$

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} +\infty$, $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$

  $f(x)+g(x)$ et $\frac{f(x)}{g(x)}$ forme indéterminée quand $x\to a$,

  $f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} -\infty$

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$ et $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$:

  . alors si $l\neq 0$, $f(x)g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$ (selon la règle des signes)

  . si $l=0$: $f(x)g(x)$ forme indéterminée quand $x\to a$

  . $f(x)+g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$ (même signe que $\lim\limits_{x\to a} f(x)$)

- Si $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$, $g(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0^{\pm}$

  alors $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} \pm\infty$ (selon la règle des signes)

- Enfin, parfois, on a besoin d'être un peu plus fin que $f(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} l$: on veut l^+ ou l^-

là ce dire des cas, mais par exemple pour

Là, ça dépend des cas, mais par règle pour montrer que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l^+$ il faut montrer que $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} l$ et qu'il existe un intervalle I autour de a tel que $\forall x \in I$, $f(x) > l$.

ex: $f(x) = x^2$, on a $f(x) \underset{x \to 0}{\longrightarrow} 0^+$

$\Rightarrow$ tout ça suffit pour calculer beaucoup de limites.

Gérer les formes indéterminées

lundi 18 octobre 2021 15:39

- Pour les formes indéterminées $\frac{\infty}{\infty}$, $\frac{0}{0}$ ou $0\times\infty$: essayer de factoriser par le terme dominant au numérateur et au dénominateur.

Par terme dominant j'entends qu'on peut de $f(x)$
écrire $f(x) = u(x)\times v(x)$ où $v(x) \underset{x\to a}{\longrightarrow} 1$
avec $u(x)$ plus simple à manipuler que $f(x)$
(et nécessairement avec la même limite quand $x\to a$)

et souvent en pratique
$f(x) = u(x) + a(x)$ où $\frac{a(x)}{u(x)} \underset{x\to a}{\longrightarrow} 0$.

$= u(x)\underbrace{\left(1+\frac{a(x)}{u(x)}\right)}_{\underset{x\to a}{\longrightarrow} 1}$

On appelle alors $u(x)$ le terme dominant quand $x\to a$.

__ex__: $f(x) = \frac{x^2+1}{x^3-2} = \frac{x^2\left(1+\frac{1}{x^2}\right)}{x^3\left(1-\frac{2}{x^3}\right)}$ quand $x\neq 0$

$= \frac{1+\frac{1}{x^2}}{x\left(1-\frac{2}{x^3}\right)} \underset{x\to+\infty}{\longrightarrow} 0$

Si on avait essayé de calculer directement, on aurait eu $\frac{\infty}{\infty}$: forme indéterminée.

indéterminée.

- Quand on a $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x\to a]{} ?$

avec f, g dérivables et $f(a) = g(a) = 0$,

on peut écrire

$$\frac{f(x)}{g(x)} = \frac{f(x) - f(0)}{x-a} \frac{x-a}{g(x)-g(0)} \xrightarrow[x\to a]{} \frac{f'(a)}{g'(a)}$$

(règle de l'Hospital)

(en supposant que $g'(a) \neq 0$).

ex: $\frac{\sin(x)}{x} \xrightarrow[x\to 0]{} \frac{\sin'(0)}{1} = \cos(0) = 1$.

MAIS ça ne résout pas tout comme le montre l'exemple de $\frac{e^x - 1 - x}{x^2} \xrightarrow[x\to 0]{} ?$

$f(x) = e^x - 1 - x$, $f'(x) = e^x - 1$ d'où $f'(0) = 0$

$g(x) = x^2$, $g'(x) = 2x$ d'où $g'(0) = 0$:

et $\frac{f'(0)}{g'(0)}$ est une forme indéterminée.

- Pour résoudre l'exemple précédent : utiliser les DL.

De manière générale, pour f et g indéfiniment dérivables et telles que $f(a) = g(a) = 0$,

et telles qu'il existe n et m tels que $f^{(n)}(a) \neq 0$ et $g^{(m)}(a) \neq 0$, soit N et M les

[illegible] ... [illegible]

$f^{(n)}(a) \neq 0$ et $g^{(m)}(a) \neq 0$, [illegible]
plus petits tels n et m, on a alors

$$f(x) = \frac{f^{(N)}(a)}{N!}(x-a)^N + O\left((x-a)^{N+1}\right)$$

$$g(x) = \frac{g^{(M)}(a)}{M!}(x-a)^M + O\left((x-a)^{M+1}\right),$$

d'où on déduit facilement :

- si $N \geq M$: $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} 0$
- si $N = M$: $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to a]{} \frac{f^{(N)}(a)}{g^{(N)}(a)}$
- si $N < M$: $\frac{f(x)}{g(x)} \underset{x \to a}{\sim} \frac{f^{(N)}(a)}{g^{(M)}(a)} \frac{M!}{N!} \frac{1}{(x-a)^{M-N}}$

et là ça dépend des signes de $f^{(N)}(a)$, $g^{(M)}(a)$, de la parité de $M-N$, et si on considère a^+ ou a^-.

<u>Ex</u> : $f(x) = e^x - 1 - x$, $g(x) = x^2$

on a $f(0) = f'(0) = 0$ mais $f''(0) = e^0 = 1$

d'où $f(x) \underset{x \to 0}{\sim} \frac{1}{2!}x^2$

et $\frac{f(x)}{g(x)} \xrightarrow[x \to 0]{} \frac{1}{2}$.

- Avec cette méthode il est indispensable d'avoir en tête les relations de <u>domination</u> :

$\ln(x) \to 0$, etc.

faire les relations ...

$$\frac{x^\alpha}{e^x} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0, \quad \frac{e^{\alpha x}}{e^{\beta x}} \xrightarrow[x\to\infty]{} 0, \quad \frac{\ln(x)}{x^\alpha} \xrightarrow[x\to+\infty]{} 0, \text{ etc.}$$

$\forall \alpha > 0$ $\qquad$ $\alpha < \beta$ $\qquad$ $\forall \alpha > 0$

- Pour la forme indéterminée $\infty - \infty$, même stratégie : voir les termes dominants de $f(x)$ et $g(x)$ et les comparer :

$$f(x) = u(x) + a(x) \qquad \text{où} \quad \begin{cases} \dfrac{a(x)}{u(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0 \\[2ex] \dfrac{b(x)}{v(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0 \end{cases}$$

$$g(x) = v(x) + b(x)$$

et $u(x), v(x) \xrightarrow[x\to a]{} +\infty$

- Si u domine v quand $x \to a$, i.e. $\dfrac{v(x)}{u(x)} \xrightarrow[x\to a]{} 0$

alors $f(x) - g(x)$

$$= \underbrace{u(x)}_{\to +\infty}\Big(1 + \underbrace{\frac{a(x)}{u(x)}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{v(x)}{u(x)}}_{\to 0} - \underbrace{\frac{b(x)}{v(x)}}_{\to 0}\,\underbrace{\frac{v(x)}{u(x)}}_{\to 0}\Big)$$

$$\xrightarrow[x\to a]{} +\infty$$

- Si v domine u, le même raisonnement donne :

$$f(x) - g(x) \xrightarrow[x\to a]{} -\infty$$

- Si $u = v$, on a $f(x) - g(x) = a(x) - b(x)$ et on continue avec a et b à la place de f si on obtient encore une forme indéterminée.

et on ... ...
si on ... ...

ex : • $f(x) = x^3$, $g(x) = x^2$, $f(x) - g(x) \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} +\infty$.
d'où $\frac{g(x)}{f(x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} 0$

• $f(x) = \frac{x^2}{x+1}$, $g(x) = x$

$f(x) = x\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}}\right)$, $g(x) = x$ (si $x \neq 0$)

$f(x) = x + x\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}} - 1\right)$

$$f(x) - g(x) = x\left(\frac{1}{1+\frac{1}{x}} - 1\right) = \frac{\frac{1}{1+\frac{1}{x}} - 1}{(1/x)} \underset{x \to +\infty}{\longrightarrow} h'(0) = -1$$

où $h(y) = \frac{1}{1+y}$,

$h'(y) = -\frac{1}{(1+y)^2}$

– En règle générale, utiliser judicieusement les dominations, équivalences, factorisations et développements asymptotiques (y compris les DL).

Choses à savoir

lundi 18 octobre 2021 16:37

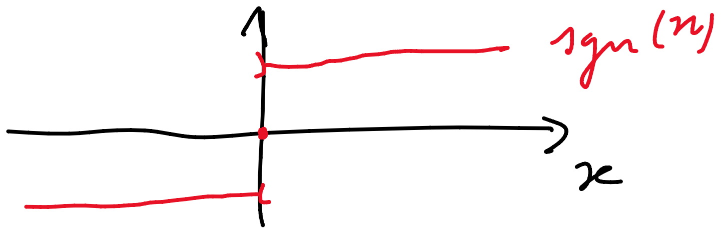
- On a $\lim_{x \to a} f(x) = \ell$ si et seulement si $(a \in \mathbb{R})$ $(\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\})$

$$\lim_{x \to a^+} f(x) = \lim_{x \to a^-} f(x) = \ell$$

- Si $f(x)$ est bornée autour de $x = a$, et $g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$, alors $f(x)g(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$

- $f(x) \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0 \iff |f(x)| \underset{x \to a}{\longrightarrow} 0$.

- $|x| = \mathrm{sgn}(x)\, x$ où $\mathrm{sgn}(x) = \begin{cases} 1 & \text{si } x > 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \\ -1 & \text{si } x < 0 \end{cases}$



- $|x| = \sqrt{x^2}$