Définition de la dérivabilité

lundi 18 octobre 2021 16:47

- Si $f : I \to \mathbb{R}$ avec I un intervalle ouvert de $\mathbb{R}$, on dit que f est dérivable en $a \in I$ si $\lim_{x \to a} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$ existe et est finie.

  On note la limite $f'(a)$.

- De manière équivalente, f est dérivable en a si et seulement s'il existe $l \in \mathbb{R}$ tel que

$\forall x \in I, f(x) = f(a) + l(x-a) + (x-a)\varepsilon(x)$ où ε est une fonction telle que $\varepsilon(x) \xrightarrow[x \to a]{} 0$.

Dans ce cas, il n'y a qu'un seul tel l et $l = f'(a)$.

En particulier cela implique que si f est <u>dérivable</u> en a, alors elle est <u>continue</u> en a.

- On peut définir la dérivée à droite / gauche de f en a de même par

$$f'_g(a) = \lim_{x \to a^-} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

$$f'_d(a) = \lim_{x \to a^+} \frac{f(x)-f(a)}{x-a}$$

et on a f dérivable en a si et seulement si

f est dérivable à gauche et à droite et

$f'_g(a) = f'_d(a)$. Dans ce cas $f'(a) = f'_g(a) = f'_d(a)$.

Un théorème de prolongement de la dérivée

lundi 18 octobre 2021 17:04

Parfois, il est facile de montrer que f est dérivable et de déterminer sa dérivée partout sauf en un point.

Il y a un théorème qui permet de trouver la dérivée de f en le point manquant dans certains cas.

Théorème

Si $f : I \to \mathbb{R}$ est continue sur I, dérivable sur $I \setminus \{a\}$ $(a \in I)$ et $f'(x) \xrightarrow[x \to a]{} l \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$, alors

$$f'(a) = l.$$

ex : $f(x) = \begin{cases} x^3 \sin\left(\frac{1}{x}\right) & \text{si } x \neq 0 \\ 0 & \text{si } x = 0 \end{cases}$

est continue (pour $x \neq 0$ c'est clair, et $\underbrace{x^3}_{\to 0,\ x \to 0} \underbrace{\sin\left(\frac{1}{x}\right)}_{\text{borné}} \xrightarrow[x \to 0]{} 0 = f(0)$)

Puis quand $x \neq 0$:

$$f'(x) = 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) + x^3\left(-\frac{1}{x^2}\right)\cos\left(\frac{1}{x}\right)$$
$$= 3x^2 \sin\left(\frac{1}{x}\right) - x\cos\left(\frac{1}{x}\right) \xrightarrow[x \to 0]{} 0 \text{ de même}$$

Alors f est dérivable en 0 également et $f'(0) = 0$.

- Le théorème est une conséquence du théorème un peu plus fin :

Théorème

Soit f continue sur $[a,b[$,
dérivable sur $]a,b[$ (où $a\in I$) et telle que
$f'(x) \underset{x\to a^+}{\longrightarrow} l \in \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$.
Alors $f'_d(a) = l$

(C'est une conséquence de l'égalité des accroissements finis :
si f est continue sur $[a,b]$ et dérivable sur $]a,b[$, alors il existe $c\in]a,b[$ tel que
$$f'(c) = \frac{f(b)-f(a)}{b-a}$$)

Ex : On peut voir directement que $f(x)=\sqrt{x}$ n'est pas dérivable en 0 :

$$\forall x>0,\quad \frac{f(x)-f(0)}{x-0} = \frac{\sqrt{x}}{x} = \frac{1}{\sqrt{x}} \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty.$$

Ou bien, on peut dire que f est continue sur $[0,+\infty[$, dérivable sur $]0,+\infty[$ avec
$f'(x) = \frac{1}{2\sqrt{x}}$ quand $x>0$

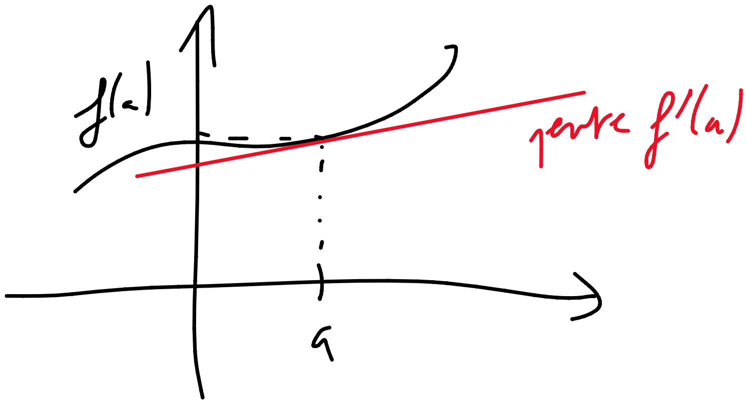
et $f'(x) \underset{x\to 0^+}{\longrightarrow} +\infty$, d'où $f'_d(0) = +\infty$.

Trouver la tangente en un point du graphe d'une fonction dérivable

lundi 18 octobre 2021 17:22

Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert, une fonction dérivable.

Soit $a \in I$.



La tangente à f en a est la droite de pente $f'(a)$ et passant par le point $(a, f(a))$, il est facile de voir que son équation est donc

$$y = f'(a)(x-a) + f(a)$$

Règles de calcul de dérivées

lundi 18 octobre 2021 17:27

On rappelle que

$(u+v)' = u'+v'$,

$(av)' = av'$ si a est une constante

$(uv)' = u'v+uv'$

$\left(\frac{u}{v}\right)' = \frac{u'v-uv'}{v^2}$, $\left(\frac{1}{v}\right)' = -\frac{v'}{v^2}$

($v \neq 0$ partout)

Et pour $f(x) = u(v(x))$, $f'(x) = v'(x)u'(v(x))$

et si $f : I \to J$ (I, J intervalles ouverts)

est dérivable, bijective et telle que $f'(x) \neq 0 \ \forall x \in I$,

alors f^{-1} est dérivable et

$$(f^{-1})'(y) = \frac{1}{f'(f^{-1}(y))}$$

- Aussi : $(uv)^{(n)} = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} u^{(k)} v^{(n-k)}$

Extrema locaux et points d'inflexion

lundi 18 octobre 2021 17:33

- Soit $f : I \to \mathbb{R}$, I intervalle ouvert.
  - On dit que f a un <u>maximum local</u> en $a \in I$ s'il existe $b, c \in I$ tels que $a \in]b, c[$ et $\forall x \in]b, c[$, $f(x) \leq f(a)$
  - On dit que f a un <u>minimum local</u> en $a \in I$ s'il existe $b, c \in I$ tels que $a \in]b, c[$ et $\forall x \in]b, c[$, $f(x) \geq f(a)$
- Si f est dérivable, on dit que $a \in I$ est un <u>point critique</u> de f si $f'(a) = 0$
- Si f a un extremum local en a, alors $f'(a) = 0$ (a est un point critique de f)

  ⚠ il est important que I soit <u>ouvert</u> ici

- Maintenant, supposons que f soit indéfiniment dérivable sur I et soit a un point critique de f.

  Alors pour déterminer si f a un extremum local ou un point d'inflexion en a, on applique la méthode suivante : on on applique la méthode suivante : on détermine le plus petit $n \geq 2$ tel que $f^{(n)}(a) \neq 0$, appelons ce nombre N.

C'est-à-dire qu'on a :

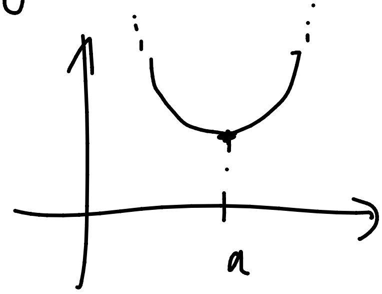
$$f'(a) = f^{(2)}(a) = \dots = f^{(N-1)}(a) = 0$$

$$f^{(N)}(a) \neq 0$$

Puis :

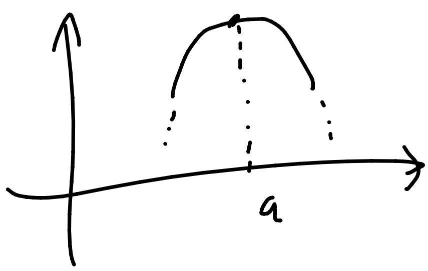
- <u>si N est pair :</u>
  - si $f^{(N)}(a) > 0$:

    f a un minimum local en a



  - si $f^{(N)}(a) < 0$

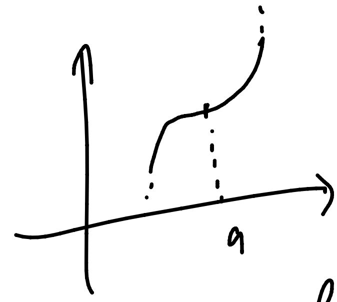
    f a un maximum local en a



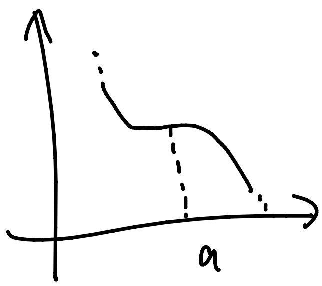
• si N est impair

f a un point d'inflexion en a

• si $f^{(N)}(a) > 0$: f est localement strictement croissante



• si $f^{(N)}(a) < 0$: f est localement strictement décroissante



↳ c'est une conséquence facile de

$$f(x) = f^{(N)}(a)\frac{(x-a)^N}{N!} + o((x-a)^N)$$

• Généralement, on a $N=2$ (pour les extremum locaux) et $N=3$ (pour les points d'inflexion).

Ex : $f : \mathbb{R}\setminus\{0\} \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x + \frac{1}{x}$$

$$f'(x) = 1 - \frac{1}{x^2} = \frac{x^2-1}{x^2}$$

on a $f'(x) = 0 \iff x = \pm 1$.

Par exemple, en $x = 1$:

$f''(x) = \frac{2}{x^3}$ d'où $f''(1) = 2 > 0$

ainsi f a un minimum local en 1.

De même on voit que f a un maximum local en -1.

- Ici, on voit qu'on pourrait également simplement faire l'étude de f :

x	$-\infty$		-1		0		1		$+\infty$
$f'(x)$		$+$	0	$-$	$\Vert$	$-$	0	$+$	
$f(x)$	$-\infty$	$\nearrow$	-2	$\searrow$	$-\infty \Vert +\infty$	$\searrow$	2	$\nearrow$	$+\infty$

Ce qui donne aussi que f a des extremum locaux en 1 et -1.

À savoir

lundi 18 octobre 2021 17:33

- Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}^*$ alors

$$a^n - b^n = (a-b)(a^{n-1} + a^{n-2}b + \dots + ab^{n-2} + b^{n-1})$$

- Si $a, b \in \mathbb{R}$ et $n \in \mathbb{N}$ alors

$$(a+b)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} a^k b^{n-k}$$

où $\binom{n}{k} = \frac{n!}{k!(n-k)!}$ avec $n! = 1 \times 2 \times \dots \times n$

- La définition de x^α où $\alpha \in \mathbb{R}$ est pour $\underline{x \geq 0}$:

$$x^\alpha = e^{\alpha \ln(x)}$$

Quand on a quelque chose de la forme $u(x)^{v(x)}$, il faut le mettre sous la forme $\exp(v(x) \ln(u(x)))$ avant de calculer dérivée, limite etc.
(sinon, on peut arriver à des formes indéterminées comme 0^0, ∞^0, $1^{\pm\infty}$)