

3 - La dérivée

Feuille de TD

Définition de dérivée. Formulation équivalent avec $\epsilon(x)$. Équation de la droite tangente. Une fonction dérivable est continue. Dérivée de la somme, du produit, du quotient. Dérivée des fonctions élémentaires. Règle de la chaîne. Dérivée de la fonction réciproque. Dérivées successives et formule de Leibniz.

52. En utilisant la définition de dérivée, montrer que les fonctions suivantes sont dérivables sur leur domaine de définition (ou sur le domaine spécifié) et calculer leur dérivée :
a. $f(x) = ax + b$, $a, b \in \mathbb{R}$, b. $f(x) = x^3$, c. $f(x) = \sqrt{x}$, si $x > 0$.

53. Montrer que la fonction $f(x) = \sqrt{x}$ n'est pas dérivable en $x = 0$.

54. Calculer l'équation de la tangente à la courbe d'équation $y = x^3 - x^2 - x$ au point d'abscisse $x = 2$.

55. Montrer que la droite $y = -x$ est tangente à la courbe donnée par l'équation $y = x^3 - 6x^2 + 8x$. Trouver le point de tangence. Est-ce que cette tangente intersecte la courbe en d'autres points ?

56. Calculer les dérivées des fonctions suivantes :

- a. $f(x) = x^2 + 3x + 2$, b. $f(x) = x^4 + \sin x$, c. $f(x) = x^4 \sin x$,
d. $f(x) = \frac{1}{x+1}$, e. $f(x) = \frac{1}{2+\cos x}$, f. $f(x) = x \ln x$, g. $f(x) = \arcsin x$,
h. $f(x) = \frac{x \sin x}{1+x^2}$, i. $f(x) = \frac{1}{1+\sqrt{x}}$, j. $f(x) = x^{3/2}$, k. $f(x) = \arctan x$.

57. Pour quelles valeurs de a et b (en termes de c) les fonctions suivantes sont-elles dérivables en c :

- a. $f(x) = \begin{cases} x^2 & \text{si } x \leq c \\ ax + b & \text{si } x > c, \end{cases}$ b. $f(x) = \begin{cases} \frac{1}{|x|} & \text{si } |x| > c \\ a + bx^2 & \text{si } |x| \leq c, \end{cases}$
c. $f(x) = \begin{cases} \sin x & \text{si } x \leq c \\ ax + b & \text{si } x > c. \end{cases}$

58. Montrer que si une fonction f est paire et dérivable, alors f' est une fonction impaire.

59. Montrer que pour tous $x \neq 1$ et $n \in \mathbb{N}$ on a :

$$1 + x + x^2 + \dots + x^n = \frac{1 - x^{n+1}}{1 - x}.$$

Déduire, par dérivation, des formules pour les sommes suivantes :

$$1 + 2x + 3x^2 + \dots + nx^{n-1}, \quad 1^2x + 2^2x^2 + 3^2x^3 + \dots + n^2x^n.$$

60. Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

- a. $x^3 e^x$, b. $1/x^2$, c. $\frac{x^2-1}{x+1}$, d. $\sin(x) \cos(x)$, e. $\frac{1}{\sqrt{x}}$, f. $x^{1/2} + x^{1/3} + x^{1/4}$,
g. $x^{-1/2} + x^{-1/3} + x^{-1/4}$, h. $\frac{\sqrt{x}}{1+x}$, i. $\frac{x}{1+\sqrt{x}}$, j. $\frac{x^2+3x+2}{x^4+x^2+1}$, k. $(\ln(\frac{1+x}{1-x}))^{1/3}$, l. x^x ,
m. $x \tan x$, n. $\frac{1}{x} + \frac{1}{x^2} + \frac{3}{x^3}$, o. $\frac{2x}{1-x^2}$, p. $\frac{1+x-x^2}{1-x+x^2}$, q. $\arcsin(2x-1)$, r. $\frac{\sin x}{x}$,
s. $\frac{\cos x}{2x^2+3}$, t. $\frac{ax^2+bx+c}{\sin x + \cos x}$, u. $\cos(2x) - 2 \sin(x)$, v. $\ln(\ln(x))$, w. $\sinh(x) \cosh(x)$.

61 (facultatif). Calculer les dérivées des fonctions suivantes sur leur domaine de définition :

- a. $f(x) = \sin((\cos x)^2) + \cos((\sin x)^2)$, b. $f(x) = \sqrt{1+x^2}$,
c. $f(x) = (2-x^2)\cos(x^2) + 2x\sin(x^3)$, d. $f(x) = (\sin x)^n \cos(nx)$, e. $f(x) = \sin(\sin(\sin x))$,
f. $f(x) = \frac{(\sin x)^2}{\sin(x^2)}$, g. $f(x) = x\sqrt{1+x^2}$, h. $f(x) = \frac{x}{\sqrt{4-x^2}}$, i. $f(x) = \left(\frac{1+x^3}{1-x^3}\right)^{1/3}$,
j. $f(x) = \sqrt{x + \sqrt{x + \sqrt{x}}}$, k. $f(x) = \arctan(x) + \arctan(1/x)$.

62. Calculer les dérivées successives de :

- a. $x^2 e^x$, b. $\ln(1+x)$, c. $\sin x + \cos x$.

Extremum local et points critiques. Théorème de Rolle, théorème des accroissements finis. Signe de la dérivée et fonctions monotones. Inégalité des accroissements finis.

63. Déterminer les extrema locaux des fonctions suivantes :

- a. $x^3 + 2x^2 - 1$, b. $\frac{1}{3+x^2}$, c. $x^4 + 2x^3$, d. $\sqrt{x} \ln(x)$, e. $\ln(1-x^2)$, f. $\sin(x^2)$.

64. Déterminer le point d'inflexion, s'il y en a, des fonctions de l'exercice précédent.

65. Étudier les extremums et les points d'inflexion de la fonction f_λ définie par $f_\lambda(x) = x^3 + \lambda x$ en fonction du paramètre λ réel.

Règle de l'Hospital.

66. Calculer les limites suivantes en utilisant, si nécessaire, le théorème de L'Hôpital :

- a. $\lim_{x \rightarrow 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2}$, b. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x}{(1+x)^n - 1}$, c. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x}$, d. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(x+1)}{\sqrt{x}}$,
e. $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{x^c - cx + c - 1}{(x-1)^2}$, f. $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(\cos(ax))}{\ln(\cos(bx))}$, g. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x)}{\arctan(1/x)}$, h. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} \frac{\tan(3x)}{\tan x}$,
i. $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\ln(a+be^x)}{\sqrt{a+bx^2}}$, j. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1 + \frac{1}{2x^2}\right)$, k. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln|\sin x|}{\ln|\sin 2x|}$.

67 (facultatif). Calculer les limites suivantes :

- a. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^-} \frac{\ln(1-2x)}{\tan(\pi x)}$, b. $\lim_{x \rightarrow +\infty} x^4 \left(\cos\left(\frac{1}{x}\right) - 1 + \frac{1}{2x^2}\right)$, c. $\lim_{x \rightarrow \pi} \frac{\ln|\sin x|}{\ln|\sin 2x|}$,
d. $\lim_{x \rightarrow \frac{1}{2}^+} \frac{\ln(1-2x)}{\tan(\pi x)}$, e. $\lim_{x \rightarrow 0^+} \frac{1}{\sqrt{x}} \left(\frac{1}{\sin x} - \frac{1}{x}\right)$, f. $\lim_{x \rightarrow 1^-} (\ln x) \ln(1-x)$,
g. $\lim_{x \rightarrow 0^+} x^{(x-1)}$, h. $\lim_{x \rightarrow 0^-} (1-2x)^{\sin x}$, i. $\lim_{x \rightarrow 0^+} (\cot x)^{\sin x}$, j. $\lim_{x \rightarrow \frac{\pi}{2}} (\tan x)^{\tan(2x)}$.

Étude de fonctions : établir le domaine de définition, calculer les limites au bord du domaine de définition, trouver les points critiques, étudier le signe de la dérivée, construire le tableau de variations, trouver les extrema de la fonction.

68. Étudier la représentation graphique des fonctions suivantes :

- a. $f(x) = x^2 - 3x + 2$, b. $f(x) = x^3 - 4x$, c. $f(x) = x + \cos x$, d. $f(x) = (x-1)^2(x+2)$.

69 (facultatif). Étudier la représentation graphique des fonctions suivantes :

- a. $f(x) = x^3 - 6x^2 + 9x + 5$, b. $f(x) = 2 + (x-1)^4$, c. $f(x) = \frac{1}{x^2}$, d. $f(x) = x + \frac{1}{x^2}$,
e. $f(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$, f. $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$, g. $f(x) = \frac{x^2-4}{x^2-9}$, h. $f(x) = (\sin x)^2$,
i. $f(x) = x - \sin x$, j. $f(x) = \frac{1}{6}x^2 + \frac{1}{12}\cos(2x)$.