*Intégrale des fonctions en escalier. Définition de fonction intégrable au sens de Riemann. Propriétés de l'intégrale. Primitives et intégrales. Primitives élémentaires.*

**1.** Trouver pour chacune des fonctions suivantes une primitive et l'utiliser pour calculer l'intégrale $\int_1^2 f(x)dx$ :
a. $f(x) = 5x^3$, b. $f(x) = 4x^2 - 12x$, c. $f(x) = (x+1)(x^3-2)$, d. $f(x) = \frac{x^4+x-3}{x^2}$,
e. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, f. $f(x) = (1+\sqrt{x})^2$, g. $f(x) = 5e^t + e^{5t}$, h. $f(x) = \frac{2x^2-6x+7}{\sqrt{x}}$,
i. $f(x) = 2x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}$, j. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{\frac{1}{2}x}$, k. $f(x) = 3\sin x + 2x^5$.

**2.** Calculer les intégrales suivantes :
a. $\int_0^x |t|dt$, b. $\int_0^x (t+|t|)^2 dt$.

**3.** Sans essayer d'évaluer les intégrales explicitement, calculer la dérivée des fonctions suivantes :
a. $f(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3}dt$, b. $g(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}dt$, c. $h(x) = \int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3}dt$.

*Changement de variable.*

**4.** Calculer par changement de variable les intégrales indéfinies suivantes :
a. $\int x^3 \cos(x^4)dx$, b. $\int (\cos x)^2 \sin(x)dx$, c. $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$, d. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$,
e. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$, f. $\int \sqrt{2x+1}dx$, g. $\int x\sqrt{1+3x}dx$, h. $\int x^2\sqrt{x+1}dx$,
i. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}dx$, j. $\int (\sin x)^3 dx$, k. $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$, l. $\int \frac{\cos x}{(\sin x)^3}dx$.

**5.** Calculer par changement de variable les intégrales suivantes :
a. $\int_{-2/3}^{1/3} \frac{x}{\sqrt{2-3x}}dx$, b. $\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\sqrt{4-\sin(2x)}dx$, c. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{(\cos x)^3}}dx$,
d. $\int_3^8 \frac{\sin\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$, e. $\int x^{n-1}\sin(x^n)dx$, $n \neq 0$, f. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}dx$,
g. $\int t(1+t)^{1/4}dt$, h. $\int (x^2+1)^{-3/2}dx$, i. $\int x^2(8x^3+27)^{2/3}dx$,
j. $\int \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^{1/3}dx}$, k. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}dx$, l. $\int \frac{(x^2+1-2x)^{1/5}}{1-x}dx$.

**6.** Montrer que, pour $x > 0$,

$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2}dt.$$

**7.** Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. En utilisant le changement de variable $u = \pi - x$, montrer que

$$\int_0^\pi x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx.$$

En déduire que

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+(\cos x)^2}dx = \pi\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx.$$

*Intégration par parties.*

**8.** Calculer, par intégration par parties, les intégrales suivantes :
a. $\int xe^{-x}dx$, b. $\int x\cos x dx$, c. $\int x^2\cos x dx$, d. $\int e^x\cos x dx$, e. $\int x\sin x dx$,
f. $\int x^2\sin x dx$, g. $\int x^3\cos x dx$, h. $\int(\sin x)^2 dx$, i. $\int \sin 3x\cos 5x dx$, j. $\int(\cos x)^3 dx$.

**9.** Calculer les primitives suivantes. On précisera sur quel intervalle on se place pour le calcul d'une telle primitive.
a. $\int \ln x dx$, b. $\int \sin(\ln x)dx$, c. $\int \frac{1}{2+3x}dx$, d. $\int(\ln x)^2 dx$, e. $\int x\ln(x)dx$,
f. $\int x^2\ln(x)dx$, g. $\int x(\ln x)^2 dx$, h. $\int_0^{e^3-1}\frac{1}{1+t}dt$, i. $\int \cot x dx$, j. $\int x^n\ln(ax)dx$,
k. $\int x^2(\ln x)^2 dx$, l. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$, m. $\int \frac{\ln|x|}{x\sqrt{1+\ln|x|}}dx$, n. $\int \arctan(x)dx$.

*Intégration de fonctions rationnelles.*

**10.** Calculer les primitives suivantes :
a. $\int \frac{1}{2x+1}dx$, b. $\int \frac{1}{(x-1)^2}dx$, c. $\int \frac{1}{x^2-1}dx$, d. $\int \frac{1}{x^2+1}dx$, e. $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$,
f. $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx$, g. $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$, h. $\int \frac{1}{4+9x^2}dx$, i. $\int \frac{1}{x^4+x^2+1}dx$, j. $\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx$.

*Calcul d'aires.*

**11.** Calculer l'aire des domaines suivants du plan, en utilisant des intégrales :
a. $A = \{(x,y)\in\mathbb{R}^2 | 0\leqslant x\leqslant \frac{\pi}{4}, 0\leqslant y\leqslant \tan(x)\}$,
b. $B = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| 1\leqslant x\leqslant 5, 0\leqslant y\leqslant \frac{\sqrt{x-1}}{x}\right\}$,
c. $C = \left\{(x,y)\in\mathbb{R}^2 \middle| 0\leqslant x\leqslant 1, 0\leqslant y\leqslant \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\right\}$.

*Exercices facultatifs.*

**12.** Calculer les primitives suivantes. On précisera sur quel intervalle on se place pour le calcul d'une telle primitive.
a. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,\ a\neq 0$, b. $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$, c. $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx,\ a\neq 0$,
d. $\int \frac{1}{a+bx^2}dx,\ ab\neq 0$, e. $\int \frac{1}{x^2-x+2}dx$, f. $\int x\arctan x\ dx$,
g. $\int x^2\arccos x\ dx$, h. $\int x(\arctan x)^2 dx$, i. $\int \arctan\sqrt{x}\ dx$,
j. $\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}dx,\ a\neq b$, k. $\int \sqrt{1-x^2}dx$, l. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$.

**13.** Utiliser l'intégration par parties pour démontrer les formules :
a. $\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$,
b. $\int(a^2-x^2)^n dx = \frac{1}{2n+1}x(a^2-x^2)^n + a^2\frac{2n}{2n+1}\int(a^2-x^2)^{n-1}dx$,
c. $\int \frac{(\sin x)^{n+1}}{(\cos x)^{m+1}}dx = \frac{1}{m}\frac{(\sin x)^n}{(\cos x)^m} - \frac{n}{m}\int \frac{(\sin x)^{n-1}}{(\cos x)^{m-1}}dx$,
d. $\int \frac{(\cos x)^{n+1}}{(\sin x)^{m+1}}dx = -\frac{1}{m}\frac{(\cos x)^n}{(\sin x)^m} - \frac{n}{m}\int \frac{(\cos x)^{n-1}}{(\sin x)^{m-1}}dx$,
e. $\int x^m(\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}dx$.