1. a. Par récurrence on a que

$$\sin^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin(x), \qquad \sin^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos(x),$$

donc

$$\sin^{(2n)}(0) = 0, \qquad \sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n,$$

et par la formule de Taylor

$$T_{0,2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Finalement

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

donc par substitution

$$\sin(2x) \sim T_{0,5}(x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!}.$$

b. $T_{0,2}(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4$.
c. $T_{0,4}(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{5!}x^9$.

4. a. Par le théorème fondamental du calcul intégral

$$\int_0^x e^t dt = \left[e^t\right]_0^x = e^x - 1,$$

donc on obtient la première approximation

$$e^x = 1 + \int_0^x e^t dt.$$

En utilisant l'intégration par parties on a que

$$\int_0^x e^t dt = \left[(t-x)e^t\right]_0^x + \int_0^x (x-t)e^t dt = x + \int_0^x (x-t)e^t dt,$$

et que

$$\int_0^x (x-t)e^t dt = \left[-\frac{(x-t)^2}{2}e^t\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 e^t dt.$$

c. Puisque $e^{sx}(1-s)^2 \geqslant 0$, on a que

$$\int_0^1 e^{sx}(1-s)^2 ds \geqslant 0$$

donc $R_2(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant 0$. Puisque $e^{sx} \leqslant 1$ si $sx \leqslant 0$ (et cela est vraie puisque $x \leqslant 0$ et $0 \leqslant s \leqslant 1$), on a aussi que

$$\int_0^1 e^{sx}(1-s)^2 ds \leqslant \int_0^1 (s-1)^2 ds = \left[\frac{(s-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

donc $R_2(x) \geqslant \frac{x^3}{6}$.
d. Puisque $x = -t^2 \leqslant 0$, par substitution on trouve

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} + R_2(-t^2), \qquad -\frac{t^6}{6} \leqslant R_2(-t^2) \leqslant 0.$$

En intégrant entre 0 et $\frac{1}{2}$ on obtient le résultat souhaité avec $\theta = -\int_0^{1/2} R_2(-t^2)dt$. L'inégalité $R_2(-t^2) \leqslant 0$ donne $\theta \geqslant 0$ et, en utilisant l'inégalité $R_2(-t^2) \geqslant -\frac{t^6}{6}$ on obteint

$$\theta = \int_0^{1/2} -R_2(-t^2)dt \leqslant \int_0^{1/2} \frac{t^6}{6} dt = \left[\frac{t^7}{6 \cdot 7}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{6 \cdot 7 \cdot 128}.$$