

Formule de Taylor.

1. Calculer les trois premiers termes non nuls des polynômes de Taylor au point 0 des fonctions suivantes :

a. $f(x) = \sin(2x)$, b. $f(x) = e^{x^2}$, c. $f(x) = \frac{\sin(x^2)}{x}$, d. $f(x) = \frac{\sinh^2 t}{1 - \cos t}$.

2. Pour chaque fonction calculer le polynôme de Taylor $T_{x_0,n}(x)$ au point x_0 à l'ordre n indiqué :

a. $f(x) = \tan(x)$, $T_{\pi,2}(x) = ?$, b. $f(x) = \frac{1}{\sqrt{1+x}}$, $T_{2,2}(x) = ?$,
 c. $f(x) = x^3 - 9x^2 + 14x + 3$, $T_{1,100}(x) = ?$, d. $f(x) = \ln(x)$, $T_{1,3}(x) = ?$.

3. Pour chaque fonction $f(x)$ montrer que le polynôme de Taylor au point x_0 à l'ordre n est le polynôme $T_{x_0,n}(x)$ indiqué :

a. $f(x) = e^x$, $T_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{1}{k!} x^k$, b. $f(x) = \frac{1}{1+x}$, $T_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^n (-1)^k x^k$,
 c. $f(x) = \ln(1+x)$, $T_{0,n}(x) = \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k+1}}{k} x^k$, d. $f(x) = a^x$, $T_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^n \frac{(\ln a)^k}{k!} x^k$,
 e. $f(x) = (1+x)^\alpha$, $T_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^n \binom{\alpha}{k} x^k$, f. $f(x) = \frac{x}{1-x^2}$, $T_{0,2n+2}(x) = \sum_{k=0}^n x^{2k+1}$.

$$T_{x_0,n}(x) = f(x_0) + f'(x_0)(x - x_0) + \frac{f''(x_0)}{2}(x - x_0)^2 + \dots + \frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x - x_0)^n$$

Reste intégral.

4. a. En utilisant l'intégration par partie, montrer que on peut écrire $\exp(x) = T_2(x) + R_2(x)$, où :

$$T_2(x) = 1 + x + \frac{x^2}{2}, \quad R_2(x) = \frac{1}{2} \int_0^x e^t (x-t)^2 dt.$$

b. Faire le changement de variable $t = sx$ et écrire

$$R_2(x) = \frac{x^3}{2} \int_0^1 e^{sx} (1-s)^2 ds.$$

c. Montrer que pour $x \leq 0$ on a l'estimation $\frac{x^3}{6} \leq R_2(x) \leq 0$.

d. En déduire que

$$\int_0^{\frac{1}{2}} e^{-t^2} dt = \frac{1}{2} - \frac{1}{24} + \frac{1}{320} - \theta, \quad 0 \leq \theta \leq (7 \cdot 6 \cdot 2^7)^{-1} \sim 0,000186.$$

$$f(x) = T_{x_0,n}(x) + \frac{1}{n!} \int_{x_0}^x (x-t)^n f^{(n+1)}(t) dt$$

Reste $f^{(n+1)}(c)$. Inégalité de Taylor-Lagrange.

5. Montrer les formules de Taylor suivantes et l'estimation de leur reste :

$$\begin{aligned} \text{a. } \sin x &= \sum_{k=1}^n \frac{(-1)^{k-1} x^{2k-1}}{(2k-1)!} + R_{2n}(x), & |R_{2n}(x)| &\leq \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}, \\ \text{b. } \cos x &= \sum_{k=0}^n \frac{(-1)^k x^{2k}}{(2k)!} + R_{2n+1}(x), & |R_{2n+1}(x)| &\leq \frac{|x|^{2n+2}}{(2n+2)!}, \\ \text{c. } \arctan x &= \sum_{k=0}^{n-1} \frac{(-1)^k x^{2k+1}}{2k+1} + R_{2n}(x), & |R_{2n}(x)| &\leq \frac{x^{2n+1}}{2n+1}, \quad 0 \leq x \leq 1. \end{aligned}$$

6. Calculer les nombres suivants avec une erreur inférieure à 5×10^{-3} en valeur absolue :

a. $e^{0,1}$, b. e , c. $\ln(6/5)$, d. $\sin(1/10)$.

$$|f^{(n+1)}(x)| \leq M, \quad |x - x_0| \leq a \quad \implies \quad |f(x) - T_{x_0,n}(x)| \leq M \frac{|x - x_0|^{n+1}}{n+1!}, \quad |x - x_0| \leq a$$

Formule de Taylor-Young. Développement limité. Unicité. Opérations. Dérivée. Primitive. Calculs de limites.

7. Calculer les limites suivantes en utilisant les développements limités et la notation "petit-o" :

$$\begin{aligned} \text{a. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos x}{x^2}, & \quad \text{b. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(2x) - 2x^2}{x^4}, & \quad \text{c. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin ax}{\sin bx}, & \quad \text{d. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\tan 2x}{\sin 3x}, \\ \text{e. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x - x}{x^3}, & \quad \text{f. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1+x)}{e^{2x} - 1}, & \quad \text{g. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - (\cos x)^2}{x \tan x}, & \quad \text{h. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin x}{\arctan x}, \\ \text{i. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{a^x - 1}{b^x - 1}, \quad b \neq 1, & \quad \text{j. } \lim_{x \rightarrow 1} \frac{\ln x}{x^2 + x - 2}, & \quad \text{k. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1 - \cos(x^2)}{x^2 \sin(x^2)}, & \quad \text{l. } \lim_{x \rightarrow 0} \left(\frac{1}{x} - \frac{1}{e^x - 1} \right), \\ \text{m. } \lim_{x \rightarrow 0} \frac{x(e^x + 1) - 2(e^x - 1)}{x^3}, & \quad \text{n. } \lim_{x \rightarrow 1} \left(\frac{1}{\ln x} - \frac{1}{x-1} \right). \end{aligned}$$

8. Montrer que si $g(x) = o(1)$ pour $x \rightarrow 0$, on a

$$\frac{1}{1 + g(x)} = 1 - g(x) + g(x)^2 + o(g(x)^2), \quad \text{pour } x \rightarrow 0.$$

En déduire que

$$\tan x = x + \frac{x^3}{3} + \frac{2x^5}{15} + o(x^5), \quad \text{pour } x \rightarrow 0.$$

$$\begin{aligned} e^x &= \sum_{k=0}^n \frac{x^k}{k!} + o(x^n), & \ln(1+x) &= -\sum_{k=1}^n \frac{(-x)^k}{k} + o(x^n), & \frac{1}{1-x} &= \sum_{k=0}^n x^k + o(x^n) \\ \sin(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k+1}}{(2k+1)!} + o(x^{2n+2}), & \cos(x) &= \sum_{k=0}^n (-1)^k \frac{x^{2k}}{(2k)!} + o(x^{2n+1}) \end{aligned}$$