

**Séances du 12 Octobre 2021**

1. Pour organiser son travail, construction d'un **tableau de fonctions** : famille de fonctions (comme **polynômes, fractions rationnelles, fonctions trigonométriques**), domaine de continuité, domaine de dérivabilité, expression de la dérivée, expression générale d'une primitive.

intervalle	$f$	$F$ =primitive de $f=\int f(x)dx$
$\mathbb{R}$	0	$K$ (constante)
$\mathbb{R}$	1	$x + K$
$\mathbb{R}$	$x^n, n \in \mathbb{N}$	$\frac{x^{n+1}}{n+1} + K$
$]0, +\infty[$	$\frac{1}{x}$	$\ln(x) + K$
$] -\infty, 0[$	$\frac{1}{x}$	$\ln(-x) + K$
$]0, +\infty[$	$x^\alpha, \alpha \neq -1$	$\frac{x^{\alpha+1}}{\alpha+1} + K$
$]0, +\infty[$	$\sqrt{x}$	$\frac{2}{3}x^{\frac{3}{2}} + K$
$\mathbb{R}$	$\cos x$	$\sin x + K$
$\mathbb{R}$	$\sin x$	$-\cos x + K$
$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$\tan x$	$-\ln(\cos x) + K$
$]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$	$1 + \tan^2(x)$	$\tan x + K$
$\mathbb{R}$	$\frac{1}{1+x^2}$	$\arctan x + K$
$\vdots$	$\vdots$	$\vdots$

2. Une petite remarque qui peut être très utile quand on cherche la limite en un point d'un produit de deux fonctions : si  $\lim_{x \rightarrow a} u(x) = 0$  et si la fonction  $x \mapsto v(x)$  est bornée au voisinage de  $a$ , alors  $\lim_{x \rightarrow a} u(x)v(x) = 0$ . On applique ce résultat à la recherche de la limite en 0 de la fonction  $x \mapsto x \sin(\frac{1}{x})$ . On a vu aussi que  $x \mapsto \sin(\frac{1}{x})$ , quant à elle, n'admet pas de limite en 0, en donnant à  $x$  des valeurs particulières ( $x = \frac{1}{\frac{\pi}{2} + 2k\pi}, x = \frac{1}{k\pi}, k$  entier non nul).
3. Nous sommes revenus sur la définition d'une fonction continue en un point ( $f$  est définie en ce point et admet une limite en ce point qui est justement la valeur de la fonction en ce point). On fera attention que la continuité en un point n'implique pas la dérivabilité en ce point ! Par contre on a la réciproque. Il suffit de remarquer que :

$$f(x) = (x - a) \frac{f(x) - f(a)}{x - a} + f(a).$$

Mais de toute façon dans l'étude d'une fonction, on commence par regarder si elle est continue ou non sur son ensemble de définition.

4. Si la fonction  $f$  tend vers  $l$  quand  $x \rightarrow a$  et si  $g$  est une fonction continue en  $l$  (donc définie au voisinage de  $a$ ), alors la fonction composée  $g \circ f$  a pour limite  $g(l)$  quand  $x$  tend vers  $a$ . Ce résultat nous a permis d'affirmer par exemple que  $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$ . Ici la fonction  $f$  est la fonction  $x \mapsto x^2$  et  $g$  est la fonction continue (sur  $\mathbb{R}$ ) définie par :

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0, \quad g(0) = 1.$$

La fonction  $g$  est le prolongement par continuité en 0 de la fonction  $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$ .

1. Licence Sciences L1, MaPC1A

5. Mise en garde : dans un calcul de limite faisant intervenir plusieurs fonctions, on ne remplace pas une des fonctions par sa limite. On verra plus tard que dans certaines situations, on peut remplacer sans risque une fonction par un développement asymptotique. Par exemple si  $u$  tend vers 1 quand  $x$  tend vers 0, on ne peut pas écrire :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-u(x)}{x} = \lim_{x \rightarrow 0} \frac{1+x-1}{x} = 1 \text{ !!!!}$$

Regardez ce qui se passe pour  $u(x) = 1+x$ ,  $u(x) = 1+x^2$ ,  $u(x) = 1+\sqrt{x}$ .

6. L'image d'un intervalle par une fonction continue (en tous les points de l'intervalle) est un intervalle (non nécessairement de même nature). L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
7. Si  $f$  est continue et strictement croissante sur un intervalle  $I$ ,  $f(I)$  est un intervalle de même nature et  $f$  réalise une bijection bi-continue de  $I$  sur  $f(I)$ . Les graphes de  $f$  et  $f^{-1}$  sont symétriques, dans un repère orthonormé, par rapport à la première bissectrice (la symétrie est donnée par  $(x, y) \mapsto (y, x)$ ).
8. On doit savoir calculer la dérivée d'une fonction composée : si  $y = f(x)$  est dérivable en  $x_0$ , si  $z = g(y)$  est dérivable en  $y_0 = f(x_0)$  alors la fonction composée  $g \circ f$  est dérivable en  $x_0$  et :

$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$

On peut utiliser les notations de Leibniz pour mémoriser ce résultat :

$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$

9. On a prouvé que la dérivée de arctan, fonction réciproque de la fonction tangente restreinte à l'intervalle  $]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}[$ , est la fonction  $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$ . On peut voir cela par deux méthodes :

(a)  $y = \arctan(x)$ ,  $x = \tan(y)$ ,

$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1 + x^2}.$$

(b) On peut aussi dériver les deux termes de l'égalité  $\tan(\arctan(x)) = x$ .

On en déduit (par exemple) :

$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \dots$$