Calcul intégral

- Nous abordons le *Calcul intégral* par la recherche de primitives en s'appuyant sur les techniques de dérivation :
  1. Par exemple, la dérivée de $x \mapsto x^5$ est $x \mapsto 5x^4$ donc les primitives sur $I\!R$ de $x \mapsto x^4$ sont les fonctions $x \mapsto \frac{x^5}{5} + K$, K constante réelle ; ou encore, la dérivée de $x \mapsto x\ln(x)$, $(x > 0$, est $x \mapsto 1 \times \ln(x) + x \times \frac{1}{x} = \ln(x) + 1$ donc les primitives sur $]0, +\infty[$ de $x \mapsto \ln(x)$ sont les fonctions $x \mapsto x\ln(x) - x + K$, K constante réelle. Sur l'intervalle $\left[0, \frac{\pi}{2}\right[$, dérivez $x \mapsto \ln(\cos(x))$. Pour quelle fonction pouvez-vous en déduire des primitives ?
  2. On sait que si u et v sont dérivables sur un même intervalle, alors la fonction uv l'est aussi et $(uv)' = u'v + uv'$ et ainsi $\int u'(x)v(x)dx = u(x)v(x) - \int u(x)v'(x)dx$ (méthode appelée *intégration par parties*). Ainsi, calculons sur $I\!R$, les primitives de $x \mapsto x\exp(x)$. Posons $u'(x) = \exp(x)$ $(u(x) = \exp(x))$ et $v(x) = x$ $(v'(x) = 1)$, il vient :

     $$\int x\exp(x)dx = x\exp(x) - \int \exp(x)dx = x\exp(x) - \exp(x) + K.$$

     Déterminons les primitives sur $I\!R$ de la fonction arctan (méthode : écrire que $\arctan(x) = 1 \times \arctan(x)$ et faire une intégration par parties si on se souvient de la dérivée de arctan !).
     La dérivée de $\arctan(x)$ est $\frac{1}{1+x^2}$. Ainsi posons $u'(x) = 1$ $(u(x) = x)$ et $v(x) = \arctan(x)$ et faisons une intégration par parties :

     $$\int \arctan(x)dx = \int 1 \times \arctan(x)dx = x\arctan(x) - \int x \times \frac{1}{1+x^2}dx.$$

     Pour conclure, il reste à déterminer une primitive de $\frac{x}{1+x^2}$. Or on voit que :

     $$\frac{x}{1+x^2} = \frac{1}{2} \times \frac{2x}{1+x^2}$$

     qui est de la forme $\dfrac{v'(x)}{v(x)} \cdots$
- Vous avez vu en cours une technique très importante, *la méthode du changement de variable*. Vous rencontrerez dans différentes situations cette idée du *changement de variable* en Mathématiques et en Physique. Pensez au changement de repère en Mécanique

1. Licence Sciences L1, MaPC1A, U-Bourgogne 2021/2022

par exemple. Ici, en *Calcul Intégral*, l'idée est d'utiliser la formule de dérivation d'une fonction composée :

$$(u \circ v)'(x) = u'(v(x))v'(x).$$

Ainsi, en mettant les bonnes hypothèses,

$$\int f(g(x))g'(x)dx = F(g(x)) + K$$

où F est une primitive de f. Dans la pratique, on pose $u = g(x)$ et donc $du = g'(x)dx$, puis $\int f(g(x))g'(x)dx = \int f(u)du = \dots$

On a aussi la formulation suivante : soit φ de classe C^1 sur $[a,b]$ et f continue sur $\varphi([a,b])$, alors

$$\int_{\varphi(a)}^{\varphi(b)} f(x)dx = \int_a^b f(\varphi(t))\varphi'(t)dt.$$

(la proposition peut servir dans les deux sens et souvent dans la pratique φ est un difféomorphisme)

Par exemple, si on doit déterminer les primitives sur $I\!R$ de $\dfrac{x^3}{1+x^4}$, on remarque qu'à une constante multiplicative près x^3 est la dérivée de x^4. Posons $u = x^4$, $du = 4x^3dx$, on a alors :

$$\int \frac{x^3}{1+x^4}dx = \frac{1}{4}\int \frac{du}{1+u} = \frac{1}{4}\ln(1+u) + K = \frac{1}{4}\ln(1+x^4) + K.$$

Déterminons les primitives sur $I\!R$ de $x \mapsto \dfrac{1}{7+x^2}$ (remarquez que $7 + x^2 = 7(1 + \left(\dfrac{x}{\sqrt{7}}\right)^2)$.

Le calcul se fait donc de la façon suivante :

$$\int \frac{1}{7+x^2}dx = \int \frac{1}{7(1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2)}dx = \frac{1}{7}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}dx$$

Alors le changement de variable $u = \dfrac{x}{\sqrt{7}}$ s'impose : $du = \dfrac{dx}{\sqrt{7}}$ d'où $dx = \sqrt{7}du$, puis

$$\frac{1}{7}\int \frac{1}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{7}}\right)^2}dx = \frac{1}{\sqrt{7}}\int \frac{du}{1+u^2} = \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan(u) + K = \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{7}}) + K.$$

Si on devait calculer $\displaystyle\int_0^1 \frac{1}{7+x^2}dx$, on écrirait :

$$\int_0^1 \frac{1}{7+x^2}dx = \left[\frac{1}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{x}{\sqrt{7}})\right]_0^1 = \frac{1}{\sqrt{7}}\arctan(\frac{1}{\sqrt{7}})$$

Calculons ensemble $\displaystyle\int_0^{1.5} \frac{4x}{1+x^2}dx$:

$$\int_0^{1.5} \frac{2}{1+x^2}2xdx$$

Faisons le changement de variable $u = x^2$: $du = 2xdx$ et comme x varie de 0 à 1.5, u varie de 0 à 2.25 :

$$\int_0^{1.5} \frac{2}{1+x^2} 2xdx = \int_0^{2.25} \frac{2}{1+u} du = 2\left[\ln(1+u)\right]_0^{2.25} = \ldots$$

– Revenons sur le symbole $\int_a^x f(t)dt$ (attention aux notations, t est la variable d'intégration !).
Si f est continue sur un intervalle I, $a \in I$ fixé, $\int_a^x f(t)dt$ ($x \in I$) est l'aire (algébrique) « sous » la courbe de f « au dessus » de l'intervalle $[a, x]$. On a le résultat extraordinaire suivant (théorie de l'intégrale de Riemann) :

    La fonction « aire » $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ est la primitive sur I de f qui s'annule au point a.

Un exemple bien connu est la fonction logarithme népérien : si $x > 0$, $\ln(x)$ est l'aire sous la branche d'hyperbole $y = \frac{1}{x}$ au dessus de l'intervalle $[1, x]$.
Mise en garde : toutes les primitives de f sur I ne sont pas nécessairement de la forme $x \mapsto \int_a^x f(t)dt$ (écrire une primitive sur $\mathbb{R}$ de $x \mapsto \dfrac{1}{1+x^2}$ qui ne s'annule pas sur $\mathbb{R}$).
– Montrons que la fonction « aire »

$$F(x) = \int_a^x f(t)dt$$

est continue et dérivable sur $[a, b]$ de dérivée f. En effet, la différence entre les deux aires $\int_a^{x_0+h} f(t)dt$ et $\int_a^{x_0} f(t)dt$ est à peu près l'aire du rectangle de base l'intervalle $[x_0, x_0 + h]$ et de hauteur $f(x_0)$:

$$F(x_0 + h) - F(x_0) \simeq h \times f(x_0).$$

d'où

$$\lim_{h \to 0} \frac{F(x_0 + h) - F(x_0)}{h} = f(x_0).$$

Remarquons ainsi que l'aire algébrique « sous » la courbe de f au « dessus » de l'intervalle $[a, b]$ vaut $F(b) - F(a)$, soit :

$$\int_a^b f(t)dt = F(b) - F(a) = [F(t)]_a^b.$$

Nous avons vu comme conséquence du théorème des accroissements finis que si deux fonctions dérivables sur un même intervalle I ont la même dérivée, elles sont égales à une constante près. Donc si f est continue sur l'intervalle I, toutes les primitives de f sur I sont égales à une constante près.
En Terminale, vous avez rencontré la célèbre fonction $x \mapsto \exp(-x^2)$ quand on vous a introduit la *loi normale* en Probabilités. Cette fonction qui est continue sur $\mathbb{R}$, admet,

d'après ce qui précéde des primitives sur $I\!R$. Par exemple sa primitive qui s'annule en 0 est :

$$F : x \mapsto \int_0^x \exp(-t^2)dt.$$

On peut montrer (difficile) que cette primitive ne s'exprime pas à l'aide des fonctions usuelles. Cependant, il nous faut manipuler de telles fonctions. Considérons la fonction :

$$g : x \mapsto \int_0^{\sin(x)} \exp(-t^2)dt.$$

Que dire ? On remarque que

$$g(x) = \int_0^{\sin(x)} \exp(-t^2)dt = [F(t)]_0^{\sin x} = F(\sin(x)),$$

donc g est, comme fonction composée, continue et dérivable sur $I\!R$ avec

$$g'(x) = F'(\sin(x))\cos(x) = \exp(-(\sin(x))^2\cos(x).$$

– Différents calculs (voir en particulier la fiche 4) :
  1. (4 e) : on remarque que la dérivée de x^2+2x+3 est $2(x+1)$. Ainsi est-il judicieux de poser $u = x^2+2x+3$ et on n'oublie pas d'écrire $du = 2(x+1)dx$. On a alors :

     $$\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx = \int \frac{du}{2\sqrt{u}} = \sqrt{u} + K = \sqrt{x^2+2x+3} + K.$$

     On aurait pu avant de se lancer dans les calculs, dire que comme $x^2+2x+3 = (x+1)^2+2 > 0$, on cherche des primitives sur $I\!R$.
  2. (4 f) : on peut se souvenir que la dérivée ($x > 0$) de $x^{\frac{3}{2}} = \frac{3}{2}\sqrt{x}$ et donc que celle de $(2x+1)^{\frac{3}{2}}$ est $\frac{3}{2}\sqrt{2x+1} \times 2 = 3\sqrt{2x+1}$. On en déduit :

     $$\int \sqrt{2x+1}dx = \frac{1}{3}(2x+1)^{\frac{3}{2}} + K.$$

     On s'est placé dès le départ sur l'intervalle $\left]-\frac{1}{2}, +\infty\right[$. Sinon, on peut faire le changement de variable $u = \sqrt{2x+1}$, donc $du = \frac{dx}{\sqrt{2x+1}}$ soit $dx = udu$. Il vient :

     $$\int \sqrt{2x+1}dx = \int u^2du = \frac{u^3}{3} + K = \frac{(\sqrt{2x+1})^3}{3} + K.$$
  3. (4 g) : le résultat final est ($x > -\frac{1}{3}$) :

     $$\int x\sqrt{1+3x}dx = \frac{2}{135}(3x+1)^{\frac{3}{2}}(9x-2) + K.$$

Pour cela, on pose $u = \sqrt{3x+1}$, $du = \frac{3}{2\sqrt{3x+1}}dx$ soit $dx = \frac{2}{3}udu$. Ainsi, on a, en remarquant que $x = \frac{u^2-1}{3}$:

$$\begin{aligned}
\int x\sqrt{1+3x}dx &= \int \frac{u^2-1}{3} \times u \times \frac{2}{3}udu && (1)\\
&= \int \frac{2}{9}(u^4-u^2)du && (2)\\
&= \frac{2}{45}u^5 - \frac{2}{27}u^3 + K && (3)\\
&= \frac{2}{45}(3x+1)^{\frac{5}{2}} - \frac{2}{27}(3x+1)^{\frac{3}{2}} + K && (4)\\
&= \frac{6(3x+1)^{\frac{5}{2}} - 10(3x+1)^{\frac{3}{2}}}{135} && (5)\\
&= \frac{2(3x+1)^{\frac{3}{2}}(3(3x+1)-5)}{135}\cdots && (6)
\end{aligned}$$

4. (4 j) : on peut linéariser $\sin^3(x)$ en utilisant les nombres complexes et la formule du binôme de Newton :

$$\sin^3(x) = \left(\frac{e^{ix}-e^{-ix}}{2i}\right)^3 = \cdots$$

Sinon, on remarque que $\sin^3(x) = (1-\cos^2(x))\sin x = \sin(x) - \cos^2(x)\sin(x)$. Il n'y aucun changement de variable à faire :

$$\int \sin^3(x)dx = -\cos(x) + \frac{1}{3}\cos^3(x) + K.$$

5. (5 d) On veut calculer $\int_3^8 \frac{\sin(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}dx$. Cela a un sens car la fonction sous le signe $\int$ est définie et continue sur l'intervalle $[3,8]$. Posons $u = \sqrt{x+1}$. Alors $du = \frac{1}{2\sqrt{x+1}}dx$, donc $dx = 2udu$ et comme x varie de 3 à 8, u varie de 2 à 3. On peut écrire :

$$\int_3^8 \frac{\sin(\sqrt{x+1})}{\sqrt{x+1}}dx = \int_2^3 \frac{\sin(u)}{u}2udu = 2\int_2^3 \sin(u)du = 2\left[-\cos(u)\right]_2^3 = 2\cos(2) - 2\cos(3).$$

6. (5 a) On veut calculer $\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{x}{\sqrt{2-3x}}dx$. Cela a un sens car la fonction sous le signe $\int$ est définie et continue sur l'intervalle $[-\frac{2}{3}, \frac{1}{3}]$ $(2-3x>0)$. Posons $u = \sqrt{2-3x}$ $(x = \frac{2-u^2}{3})$. Alors $du = \frac{-3}{2\sqrt{2-3x}}dx$, donc $dx = -\frac{2}{3}udu$ et comme x varie de $-\frac{2}{3}$ à $\frac{1}{3}$, u varie de 2 à 1. On peut écrire :

$$\int_{-\frac{2}{3}}^{\frac{1}{3}} \frac{x}{\sqrt{2-3x}}dx = -\frac{2}{3}\int_2^1 \frac{\frac{2-u^2}{3}}{u}udu = \frac{2}{9}\int_1^2 (2-u^2)du = \cdots$$

7. On a :

$$x^2 - x + 2 = (x-\frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}.$$

Donc on débute par :

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 2} = \int \frac{dx}{(x - \frac{1}{2})^2 + \frac{7}{4}}.$$

On pose donc $u = x - \frac{1}{2}$, $du = dx$:

$$\int \frac{dx}{x^2 - x + 2} = \int \frac{du}{u^2 + \frac{7}{4}} = \frac{4}{7} \int \frac{du}{\left(\frac{u\sqrt{7}}{2}\right)^2 + 1}$$

On termine en posant $s = \frac{u\sqrt{7}}{2}$.

– Déterminons les primitives de $\displaystyle\int \frac{dx}{\sin(x)}$. La première question que vous devez vous poser est : sur quel intervalle dois-je me placer ? Dans notre cas, la fonction sous le signe $\int$ est définie et continue par exemple sur l'intervalle $\left]0, \frac{\pi}{2}\right[$ donc admet des primitives sur cet intervalle.
On a :

$$\sin(x) > 0, \ \cos(x) > 0, \ \sin(x) = \sqrt{1 - \cos^2(x)}.$$

Posons alors $u = \cos x$: $0 < u < 1$ et

$$du = -\sin(x)dx = -\sqrt{1 - \cos^2(x)}dx, \ dx = -\frac{du}{\sqrt{1 - u^2}}.$$

Et ainsi, on peut écrire :

$$\int \frac{dx}{\sin(x)} = \int \frac{-\frac{du}{\sqrt{1-u^2}}}{\sqrt{1 - u^2}} = -\int \frac{du}{1 - u^2} = \int \left(\frac{A}{1 - u} + \frac{B}{1 + u}\right) du.$$

où A et B sont deux constantes à déterminer. Terminez ce calcul !! On pourrait aussi, en se plaçant toujours sur un bon intervalle, utiliser le changement de variable classique (*tangente de l'angle moitié*) $s = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$.
On détermine une primitive de $x \mapsto \frac{1}{\sin x}$ sur l'intervalle $]0, \pi[$ en faisant le changement de variable $s = \tan\left(\frac{x}{2}\right)$. On a :

$$ds = \frac{1}{2}(1 + s^2)dx, \ dx = \frac{2ds}{1 + s^2}, \ \sin x = \frac{2s}{1 + s^2}.$$

Ainsi, on peut écrire :

$$\int \frac{dx}{\sin x} \int \frac{\frac{2ds}{1+s^2}}{\frac{2s}{1+s^2}} = \int \frac{ds}{s} = \ln(s) + K = \ln(\tan\left(\frac{x}{2}\right)) + K.$$