Q°1

dimanche 3 octobre 2021 12:17

① $f(x) = \dfrac{1}{|x+1| - 1}$

- $f(x)$ est défini pour x tel que $|x+1| \neq 1$, c'est-à-dire $x+1 \neq \pm 1$ soit $x \neq 0$ ou -2.

  Ainsi $\mathcal{D}_f = \mathbb{R} \setminus \{-2, 0\}$

- On a : – si $x \in]-\infty, -1] \setminus \{-2\}$: $x+1 \leq 0$ d'où

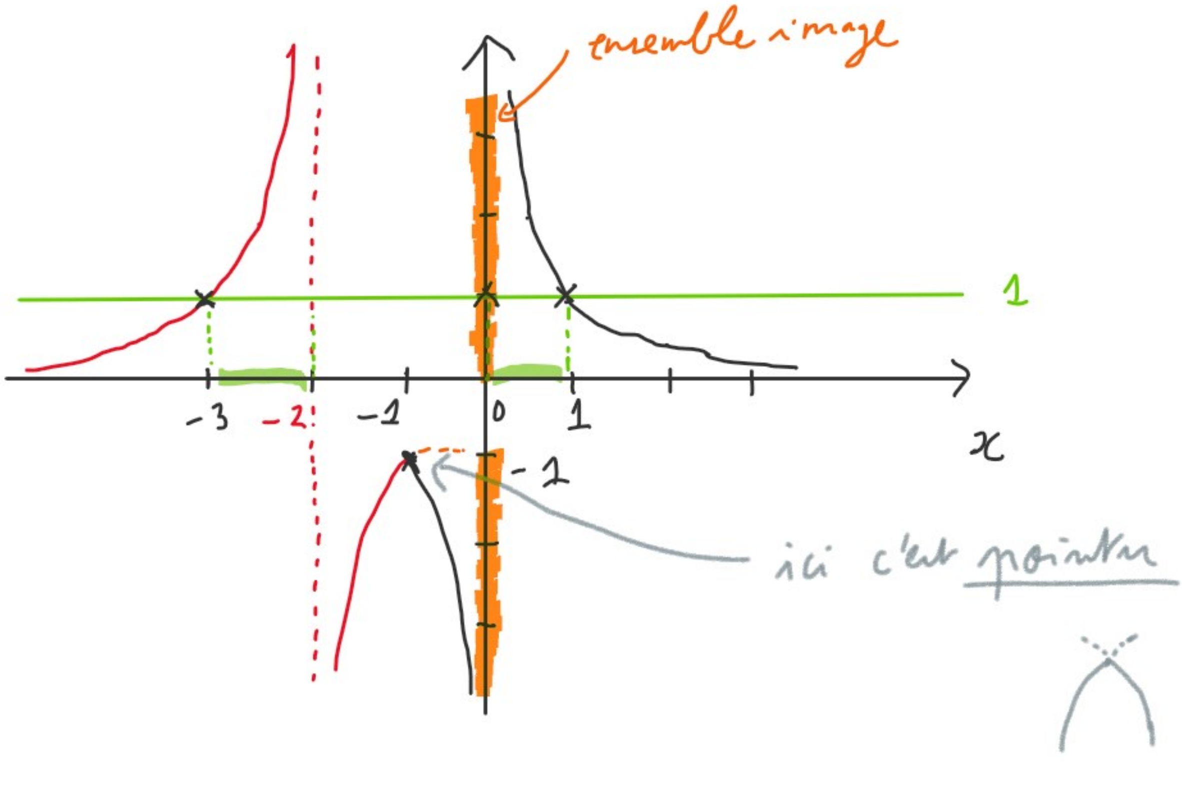
$$f(x) = \frac{1}{-x-1-1} = \frac{-1}{x+2}$$

(en rouge sur le graphe)

– si $x \in]1, +\infty[\setminus \{0\}$: $x+1 > 0$ d'où

$$f(x) = \frac{1}{x+1-1} = \frac{1}{x}$$

(en noir sur le graphe)



- On peut lire directement sur le graphique que

$\mathrm{Im}(f) =]-\infty, -1] \cup]0, +\infty[$

Q°2

dimanche 3 octobre 2021 12:33

(2). On peut lire directement sur le graphe (ligne verte) que $f(x) > 1 \iff x \in]-3,-2[\cup]0,1[$

. Ou bien : on écrit $f(x) > 1 \iff \dfrac{1}{|x+1|-1} > 1$

$$\iff \frac{1}{|x+1|-1} - 1 > 0 \iff \frac{2-|x+1|}{|x+1|-1} > 0$$

On fait un tableau de signes. Il faut d'abord connaître les zéros de $2-|x+1|$ et $\underbrace{|x+1|-1}_{\text{on connaît déjà.}}$

x	$-\infty$		-3		-2		0		1		$+\infty$
$2-\lvert x+1\rvert$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	0	$-$	
$\lvert x+1\rvert-1$		$+$		$+$	0	$-$	0	$+$		$+$	
$\dfrac{2-\lvert x+1\rvert}{\lvert x+1\rvert-1}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	0	$-$	

Et $2-|x+1| = 0$

$\iff x+1 = \pm 2$

$\iff x = -3$ ou $x = 1$

Ce qui donne bien comme ensemble solution

$]-3,-2[\cup]0,1[$

<u>Remarque</u> : pour connaître le signe d'une fonction continue, par exemple $g(x) = 2-|x+1|$, on peut trouver ses zéros (ici -3 et 1) et pour chacun des intervalles entre les zéros, une valeur suffit pour trouver le signe sur <u>tout l'intervalle</u> (une fonction <u>continue</u> qui ne <u>s'annule</u>

[illegible]

tout l'intervalle (une fonction co[illegible]
pas est de **signe** constant).

NL: pour $]-3,1[$, on a par ex $0 \in]-3,1[$
et $g(0) = 2 - |0+1| = 1 > 0$ donc $g(x) > 0$
lorsque $x \in]-3,1[$, comme g est continue.

Q°3

dimanche 3 octobre 2021 13:02

③ $\sin(2x) = \cos^2(x)$

$\Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) = \cos^2(x)$

$\Leftrightarrow 2\sin(x)\cos(x) - \cos^2(x) = 0$

$\Leftrightarrow (2\sin(x) - \cos(x))\cos(x) = 0$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \cos(x) = 0 \\ \underline{\text{ou}} \quad \cos(x) \neq 0 \text{ et } 2\sin(x) = \cos(x) \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} x \in \left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\} + 2\pi\mathbb{Z} \\ \underline{\text{ou}} \quad \cos(x) \neq 0 \text{ et } \tan(x) = \frac{1}{2} \end{cases}$$

$\Leftrightarrow x \in \left(\left\{-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right\} + 2\pi\mathbb{Z}\right) \cup \left(\operatorname{Arctan}\left(\frac{1}{2}\right) + \pi\mathbb{Z}\right)$