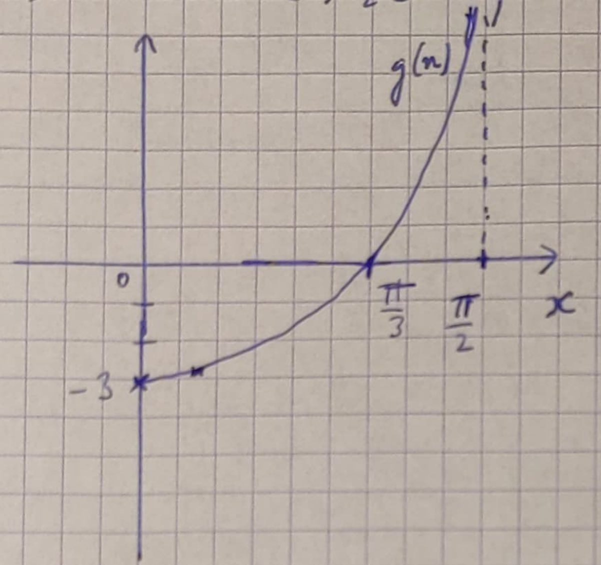
• Correction Quizz 3

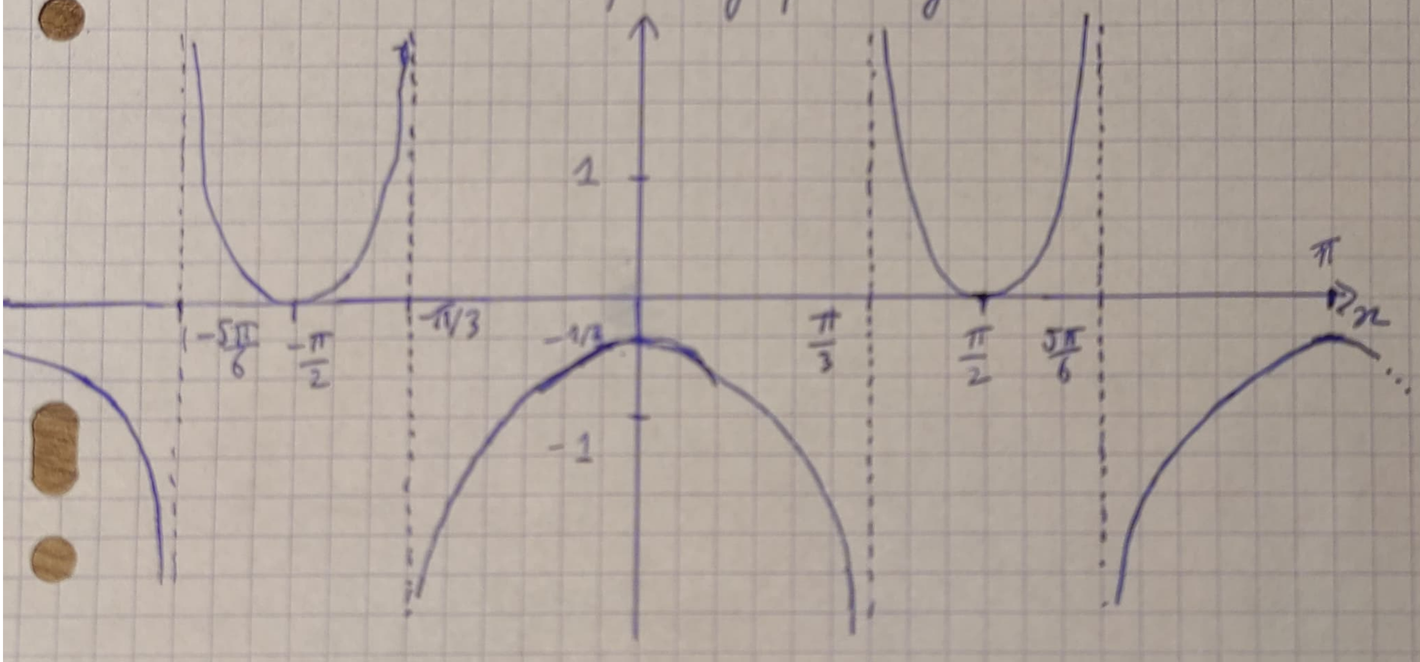
① - On peut d'abord remarquer que f est paire et π-périodique.
On peut donc se restreindre à étudier f sur $]0, \frac{\pi}{2}[$,
on obtiendra le graphe de f sur le reste du domaine de f.

- $f(x)$ est défini lorsque $\tan(x)$ est défini et $\tan(x)^2 \neq 3$
c'est-à-dire $\tan(x) \neq \pm 3$ et $x \neq 0 \pmod{\pi} \rightarrow D_f = \mathbb{R} \setminus (\pi\mathbb{Z} \cup (\{\pm\frac{\pi}{3}\} + \pi\mathbb{Z}))$

- Puis : $g(x) = \tan(x)^2 - 3$ est strictement croissante sur $]0, \frac{\pi}{2}[$
puisque $\tan$ l'est, $\tan(x) > 0 \ \forall x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ et la fonction
carré est strictement croissante sur $[0, +\infty[$. De plus,
le seul $x \in]0, \frac{\pi}{2}[$ tel que $g(x) = 0$ est $x = \frac{\pi}{3}$:



On en déduit directement que le graphe de f est



et que $Im(f) = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left]0, +\infty\right[$.

Remarque : On voit également qu'on peut étendre f par continuité en $\frac{\pi}{2} + k\pi$ par $f\left(\frac{\pi}{2} + k\pi\right) = 0$.

De plus $f'(x) = \dfrac{\tan(x)^3 + 2\tan(x) - 3}{(\tan(x)^2 - 3)^2} \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\sim} \dfrac{1}{\tan(x)} \underset{x \to \frac{\pi}{2}}{\longrightarrow} 0$

d'où f est "plate" en $\frac{\pi}{2}$. Avec ce prolongement,

$$D_f = \mathbb{R} \setminus \left(\left\{\pm \frac{\pi}{3}\right\} + \pi\mathbb{Z}\right) \text{ et } Im(f) = \left]-\infty, -\frac{1}{3}\right] \cup \left[0, +\infty\right[$$

(2) $\dfrac{1}{x} \geq \dfrac{1}{2x+1} \iff \dfrac{1}{x} - \dfrac{1}{2x+1} \geq 0$

$\iff \dfrac{2x+1-x}{x(2x+1)} \geq 0 \iff \dfrac{x+1}{x(2x+1)} \geq 0$

x	$-\infty$		-1		$-\frac{1}{2}$		0		$+\infty$
$x+1$		$-$	0	$+$		$+$		$+$	
x		$-$		$-$		$-$	0	$+$	
$2x+1$		$-$		$-$	0	$+$		$+$	
$\frac{x+1}{x(2x+1)}$		$-$	0	$+$	$\Vert$	$-$	$\Vert$	$+$	

D'où $S = \left]-1, -\frac{1}{2}\right[\cup \left]0, +\infty\right[$.