MaPC1A CC 27/10/22

EX. 1. $|x^2 - x| > 1$

(1) $\begin{cases} x^2 - x \geqslant 0 \\ x^2 - x > 1 \end{cases}$ ou (2) $\begin{cases} x^2 - x < 0 \\ -x^2 + x > 1 \end{cases}$

(1) : $\begin{cases} (x-1)x \geqslant 0 \\ x^2 - x - 1 > 0 \end{cases}$ $\begin{cases} x \leq 0 \quad \text{ou} \quad x \geq 1 \\ x \leq \frac{1}{2}(1-\sqrt{5}) \quad \text{ou} \quad x \geqslant \frac{1}{2}(1+\sqrt{5}) \end{cases}$

$\Delta = 1 + 4 = 5 > 0$

$x_{1,2} = \frac{1}{2}(1 \pm \sqrt{5})$

donc la solution de (1) est :

$$\left]-\infty, \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right[\cup \left]\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}), +\infty\right[$$

(2) : $\begin{cases} x^2 - x < 0 \\ x^2 - x + 1 < 0 \end{cases}$

$\Delta = 1 - 4 = -3 < 0 \Rightarrow x^2 - x + 1 > 0 \quad \forall x$

donc (2) n'a pas solution.

La solution de l'inégalité est :

$$\left]-\infty, \tfrac{1}{2}(1-\sqrt{5})\right[\cup \left]\tfrac{1}{2}(1+\sqrt{5}), +\infty\right[$$

EX.2. $\sin x = \dfrac{\sqrt{5}}{4}$ $\qquad$ $\cos y = \dfrac{\sqrt{7}}{4}$

- $\cos x = \pm\sqrt{1-\sin^2 x} = \pm\sqrt{1-\frac{5}{16}} = \pm\dfrac{\sqrt{11}}{4}$
- $\sin y = \pm\sqrt{1-\cos^2 y} = \pm\sqrt{1-\frac{7}{16}} = \pm\dfrac{3}{4}$
- $\sin(x+y) = \sin x\cos y + \sin y \cos x$

$$= \frac{\sqrt{5}}{4}\cdot\frac{\sqrt{7}}{4} \pm \frac{\sqrt{11}}{4}\cdot\frac{3}{4} = \frac{\sqrt{35}\pm\sqrt{99}}{16}$$

EX.3.

(a) $\displaystyle\lim_{x\to 0} \frac{\ln(1-\sin(x))}{x} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{Hô.}}{=} \lim \frac{-\cos x}{1-\sin x} = -1$

(b) $\displaystyle\lim_{x\to 1} \frac{5x^3-2x^2-3}{3x^3-3x^2+x-1} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{Hô.}}{=} \lim \frac{15x^2-4x}{9x^2-6x+1} = \frac{11}{4}$

(c) $\displaystyle\lim_{x\to +\infty} \frac{\sin(1/x)}{\arctan(1/x)} = \left[\frac{0}{0}\right] \underset{\text{Hô.}}{=} \lim \frac{\cos(1/x)\cdot\left(-1/x^2\right)}{\frac{1}{1+1/x^2}\cdot\left(-1/x^2\right)} = 1$

EX.4.

(a) $D_a = \left]1,+\infty\right[\cap [-2,2] = \left]1,2\right]$

$D_a^{der} = \left]1,2\right[$

$a'(x) = \dfrac{1}{x-1} - \dfrac{2x}{\sqrt{4-x^2}}$

(b) $D_b = D_b^{der} = \mathbb{R}^*$

$b'(x) = -n x^{-n-1} \cos(x) - x^{-n} \sin(x)$

(c) $\ln y$ est défini pour $y > 0$, donc il faut imposer

$\cos(x) > 0$ c-à-d $x \in]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$, $k \in \mathbb{Z}$.

$D_c = D_c^{der} = \bigcup_{k \in \mathbb{Z}}]-\frac{\pi}{2} + 2k\pi, \frac{\pi}{2} + 2k\pi[$

$c'(x) = \dfrac{-\sin(x)}{\cos(x)} = -\tan(x)$

<u>EX.5.</u> $h(x) = \dfrac{x^2 - 4}{x^2 - 9}$

(a) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{-3, 3\}$

(b) $\lim_{x \to \pm\infty} h(x) = 1$

$\lim_{x \to 3^+} h(x) = +\infty$ $\lim_{x \to 3^-} h(x) = -\infty$

$\lim_{x \to -3^+} h(x) = -\infty$ $\lim_{x \to -3^-} h(x) = +\infty$

(c) $h'(x) = \dfrac{-10x}{(x^2-9)^2}$

$h'(x) = 0 \iff x = 0$

(d) $h'(x) > 0 \iff x < 0 \iff h(x)$ strict. croiss.

$h'(x) < 0 \iff x > 0 \iff h(x)$ strict. décr.

Le point $x = 0$ est un maximum local.

EX.6. $f(x) = \sin(x) + \sin^3(x)$

(a) $f'(x) = \cos(x) + 3\sin^2(x)\cos(x)$

(b) f est continue et strict. croissante sur $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$

donc l'image de $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$ est $]-2, 2[$.

(c) Une fonction strict. croissante est injective, donc

bijective sur son image.

(d) $f\left(\frac{\pi}{6}\right) = \frac{1}{2} + \left(\frac{1}{2}\right)^3 = \frac{5}{8}$ donc $x = \frac{\pi}{6}$ est

l'unique antécédent de $y = \frac{5}{8}$.

(e) $$(f^{-1})'\left(\frac{5}{8}\right) = \frac{1}{f'\left(f^{-1}\left(\frac{5}{8}\right)\right)} = \frac{1}{f'\left(\frac{\pi}{6}\right)} =$$

$$= \left(\cos\left(\frac{\pi}{6}\right)\left(1 + 3\sin^2\frac{\pi}{6}\right)\right)^{-1}$$

$$= \frac{8}{7\sqrt{3}}$$