

Partiel du 27 octobre 2022, 10h15-12h15.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. Résoudre l'inéquation

$$|x^2 - x| > 1.$$

2. Soient x et y deux nombres réels tels que

$$\sin x = \frac{\sqrt{5}}{4}, \quad \cos y = \frac{\sqrt{7}}{4}.$$

Quelles sont les valeurs possibles de $\cos x$, $\sin y$, et $\sin(x + y)$?

3. Calculer les limites suivantes :

- $\lim_{x \rightarrow 0} \frac{\ln(1 - \sin(x))}{x}$,
- $\lim_{x \rightarrow 1} \frac{5x^3 - 2x^2 - 3}{3x^3 - 3x^2 + x - 1}$,
- $\lim_{x \rightarrow +\infty} \frac{\sin(1/x)}{\arctan(1/x)}$.

4. Calculer les dérivées des fonctions suivantes, en spécifiant le domaine de définition et le domaine de dérivabilité :

- $a(x) = \ln(x - 1) + \sqrt{4 - x^2}$,
- $b(x) = x^{-n} \cos x$ pour n entier positif,
- $c(x) = \ln(\cos(x))$.

5. On considère la fonction

$$h(x) = \frac{x^2 - 4}{x^2 - 9}.$$

- Donner le domaine de définition de h .
- Calculer les limites au bord du domaine de définition et en $\pm\infty$.
- Calculer la dérivée et trouver tous les points critiques de h .
- Étudier le signe de la dérivée, trouver le sens de variation et les extrema de h .

6. On considère la fonction $f :] - \pi/2, \pi/2[\rightarrow \mathbb{R}$ définie par

$$f(x) = \sin(x) + \sin^3(x).$$

- Calculer la dérivée de f .
- Donner l'ensemble image I de f .
- Montrer que $f :] - \pi/2, \pi/2[\rightarrow I$ est bijective.
- Trouver l'antécédent par f de $y = 5/8$. (Observer que $1/2 + (1/2)^3 = 5/8$).
- Calculer la dérivée de la fonction réciproque $f^{-1}(y)$ pour $y = 5/8$.