

Examen du 4 janvier 2023, 16h00-18h00.

Les documents, les calculatrices et tout objet électronique ne sont pas autorisés. Les exercices sont indépendants. Toutes vos réponses doivent être justifiées.

1. On considère la fonction

$$f(x) = \frac{e^{2x}}{1 - x^2}.$$

- a. Donner le domaine de définition de f .
- b. Calculer les limites au bord du domaine de définition et en $\pm\infty$.
- c. Calculer la dérivée et trouver tous les points critiques de f .
- d. Étudier le signe de la dérivée, trouver le sens de variation et les extrema de f .

2. Donner pour chacune des fonctions suivantes, une primitive sur un intervalle que l'on précisera :

- a. $x^2 e^{x^3}$,
- b. $x^3 \ln(x)$.

3. Calculer les intégrales suivantes :

- a. $\int_1^2 \left(\frac{1}{x} + 2x^5\right) dx$,
- b. $\int_0^{\pi/2} x \cos x dx$.

4. Calculer les limites en 0 de :

- a. $\frac{x - \sin x}{x^2}$,
- b. $\frac{x - \sin x}{x^3}$,
- c. $\frac{x - \sin x}{x^4}$.

5. Calculer les deux premiers termes non nuls du polynôme de Taylor en 0 de la fonction définie par :

$$g(x) = \sin(x)\sqrt{1 - x^2}.$$

Suggestion : quelle est la parité de la fonction g ?

6. Calculer la limite suivante en utilisant les développements limités et la notation "petit-o" :

$$\lim_{x \rightarrow 0} \frac{x \sin x - \ln(1 + x^2)}{(e^{x^2} - 1)^2}.$$