Définition de fonction. Domaine de définition. Graphe. Ensemble image. Somme, produit, quotient, composition de fonctions.

1. À partir du graphe des fonctions élémentaires, donner le domaine de définition et dessiner le graphe des fonctions suivantes :
a. $2x^2-3$, b. $\frac{1}{y}+5$, c. $1-\sqrt{z}$, d. t^3+1, e. $2\sin\theta-1$, f. e^{2x}, g. $\ln(u-1)$, h. $\frac{2}{x-1}$, i. $2\arcsin(y)$, j. $\arctan(z)+5$, k. $\ln(3x)$, l. $\cos(2t)$.

2. Soient $f(x) = 2x^2-3$, $g(y) = \frac{1}{y}+5$ et $h(z) = 1-\sqrt{z}$. Calculer les fonctions composées suivantes :
a. $f(g(y))$, b. $g(f(x))$, c. $g(h(z))$, d. $h(f(x))$, e. $f(h(g(y)))$.

3. Donner le domaine de définition et l'ensemble image des fonctions suivantes :
a. $e^x + x^2$, b. x^{-n}, $n \in \mathbb{N}^*$, c. $\sqrt[n]{x}$, $n \in \mathbb{N}^*$, d. $\sin(x)$, e. $\ln(x)$, f. $\frac{x}{x^2-4}$, g. $\sqrt{x^2+x+1}$, h. $x^{1/x}$.

4. Trouver l'ensemble de définition des fonctions suivantes :
a. $\frac{x^2+2x-1}{x^2-2x+1}$, b. $\sqrt{y^3-8}+\sqrt{y^3+8}$, c. $\ln(z+5)$, d. $\ln\sqrt{t^2-4}$, e. $\frac{1}{\sin\theta}$, f. $\arctan(1/x)$, g. $\ln(\tan u)$, h. $\sqrt{1-x^2}$, i. $\arcsin\left(\frac{2z}{1+z^2}\right)$.

Fonctions paires, impaires, périodiques. Fonctions bornées, monotones.

5. Déterminer si les fonctions suivantes sont paires ou impaires :
a. $3x^6+2x^2$, b. $\frac{\tan x - x}{x^3\cos x}$, c. $\frac{\sin^2(2x)-\cos(3x)}{\tan x}$, d. $\frac{x-1}{\sin(x+1)}+\cos x$.

6. Soient $f, g : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ deux fonctions paires. Que peut-on dire sur la parité de la somme $f+g$, du produit fg, et de la composée $f \circ g$? Et si f, g sont impaires ? Et si l'une est paire et l'autre impaire ?

7. Déterminer si les fonctions suivantes sont périodiques :
a. $\cos^2(3x)$, b. $3\cos(x^2)$, c. $3\sin(x/2)+2\sin(x/3)$, d. $\sin(x)+2\cos(\sqrt{2}x)$.

8. Soient f et g deux fonctions réelles définies sur $\mathbb{R}$ et périodiques de période n et m respectivement où $n, m \in \mathbb{N}^*$. Montrer que la somme $f+g$ est une fonction périodique.

9. Montrer que la fonction $f(x) = -1+\frac{2x^2}{x^2+1}$ est bornée, car majorée par 1 et minorée par -1. Montrer qu'elle est aussi majorée par la fonction $g(x) = x^2$.

10. Soit $f(x) = \frac{x}{1+x^2}$. Montrer que $|f(x)|$ est majorée par $\frac{1}{2}$.

11. La fonction $\frac{1}{x}$ est-elle monotone sur $]-\infty, 0[$? Et sur $]0, +\infty[$? Et sur $\mathbb{R} \setminus \{0\}$?

Fonctions injectives, surjectives et bijectives. Fonction réciproque.

12. Montrer que la fonction $g(x) = \sqrt{2x+1}$ est bijective et trouver sa fonction réciproque $g^{-1}(y)$.

13. Calculer la réciproque des fonctions de l'exercice 1.

14. Calculer les valeurs suivantes :
a. $\arcsin(1/2)$, b. $\arctan(\sqrt{3}/3)$, c. $\arcsin(-\sqrt{3}/2)$, d. $\arctan(-1)$,
e. $\arcsin(\sin(2\pi/3))$, f. $\arctan(\tan(9\pi/4))$, g. $\sin(\arcsin(\sqrt{2}/\sqrt{5}))$, h. $\tan(\arctan(3))$.

Définition de la limite. Limite finie et infinie en un point. Limites à gauche et à droite. Limites en l'infini.

15. Donner les définitions des limites suivantes au niveau intuitif et en utilisant ϵ, δ :

a. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$,

b. $\lim_{x\to+\infty} \arctan(x) = \frac{\pi}{2}$,

c. $\lim_{x\to\frac{\pi}{2}^+} \tan(x) = -\infty$.

16. Dire si les limites suivantes existent :
a. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{1-x}$, b. $\lim_{x\to 1} \frac{1}{(1-x)^2}$, c. $\lim_{x\to 1^+} \frac{1}{1-x}$, d. $\lim_{x\to 2} \sqrt{x-2}$,
e. $\lim_{x\to -1^+} \arccos(x)$, f. $\lim_{x\to 0} \ln(x)$, g. $\lim_{x\to 0^+} x^\alpha$, $\alpha \in \mathbb{R}$.

17. Soit $g(x) = \begin{cases} x & \text{si } x \neq 2, \\ 1 & \text{si } x = 2. \end{cases}$ Calculer $\lim_{x\to 2} g(x)$.

18. Soit $f(x) = \frac{|x-2|}{x^2+x-6}$. Calculer $\lim_{x\to 2^+} f(x)$, $\lim_{x\to 2^-} f(x)$ et $\lim_{x\to 2} f(x)$.

19. Calculer les limites à gauche et à droite en $+1$ et -1 de $\sqrt{1-x^2}$.

Propriétés des limites par rapport aux opérations. Formes indéterminées. Limites des polynômes et des fonctions rationnelles.

20. Calculer les limites des fonctions rationnelles suivantes :
a. $\lim_{x\to 2} \frac{1}{x^2}$, b. $\lim_{x\to a} \frac{x^2-a^2}{x^2+2ax+a^2}$, $a \neq 0$, c. $\lim_{x\to 0} \frac{25x^3+2}{75x^7-2}$,
d. $\lim_{x\to 2} \frac{x^2-4}{x-2}$, e. $\lim_{x\to 1} \frac{2x^2-3x+1}{x-1}$, f. $\lim_{x\to 0} \frac{(t+x)^2-t^2}{x}$.

21. Calculer les limites suivantes :
a. $\lim_{x\to 0} \tan x$, b. $\lim_{x\to 0}(\sin(2x) + x^2\cos(5x))$, c. $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{|x|}{x}$,
d. $\lim_{x\to 0^\pm} \frac{\sqrt{x^2}}{x}$.

Inégalités et limites. Théorème des gendarmes.

22. En utilisant le théorème des gendarmes, montrer que si $\lim_{x\to a}|f(x)| = 0$, alors $\lim_{x\to a} f(x) = 0$.

23. Calculer les limites suivantes :
a. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x}$, b. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(2x)}{x}$, c. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)-\sin(3x)}{x}$, d. $\lim_{x\to 0} \frac{\tan(2x)}{\sin x}$,
e. $\lim_{x\to a} \frac{\sin x-\sin a}{x-a}$, f. $\lim_{x\to 0} \frac{\sin(5x)}{\sin x}$, g. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2}$.

Continuité en un point. Continuité sur un intervalle. Continuité et opérations élémentaires. Prolongement par continuité. Lemme du signe. Théorème des valeurs intermédiaires. Fonctions continues sur un intervalle borné et fermé.

24. Montrer la continuité des fonctions $\sin(x)$ et $\cos(x)$ pour tout $x \in \mathbb{R}$.

Suggestion. Utiliser l'inégalité $|\sin(x)| \leqslant |x|$ pour montrer la continuité de $\sin(x)$ en 0. Utiliser l'identité $\cos(2x) = 1 - 2(\sin x)^2$ pour en déduire la continuité de $\cos(x)$ en 0. Utiliser les formules pour $\sin(x + h)$ et $\cos(x + h)$ pour montrer la continuité pour tout $x \in \mathbb{R}$.

25. Déterminer le domaine de définition et de continuité des fonctions suivantes :
a. $\frac{1}{\sin(x)}$, b. $\frac{1}{\sqrt{x+\frac{1}{2}}}$, c. $\ln(x^2 + x - 1)$.

26. Soit $f : \mathbb{R} \setminus \{0\} \to \mathbb{R}$ la fonction définie par $f(x) = x\sin(\frac{1}{x})$. Calculer la limite de f lorsque x tend vers 0. Trouver le prolongement par continuité $\tilde{f}(x)$ de f en 0.

Suggestion. Majorer la valeur absolue de $f(x)$ et utiliser le théorème des gendarmes.

27. Étudier la continuité de $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = \sin(x)\cos(1/x)$ si $x \neq 0$ et $f(0) = 0$. Même question pour $g(x) = xH(x)$.

28. La fonction $\frac{x^3+8}{|x+2|}$ admet-elle un prolongement par continuité en $x = -2$?

29. Calculer les limites suivantes en expliquant quel résultat sur les limites on est en train d'utiliser :
a. $\lim_{x\to -2} \frac{x^3+8}{x^2-4}$, b. $\lim_{x\to 1} \frac{\sin(x^2-1)}{x-1}$, c. $\lim_{x\to 4} \sqrt{1+\sqrt{x}}$, d. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)}{x^2}$,
e. $\lim_{x\to \pi/2} \frac{\sin(\cos x)}{\cos x}$, f. $\lim_{x\to 0} \frac{\sqrt{1+x}-\sqrt{1-x}}{x}$, g. $\lim_{x\to \pi} \frac{\sin(x-\pi)}{x-\pi}$, h. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\sqrt{1-4x^2}}{x^2}$.

30. Calculer les limites suivantes :
a. $\lim_{x\to -\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$, b. $\lim_{x\to +\infty} \left(\sqrt{x^2+x} - x\right)$, c. $\lim_{x\to +\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$,
d. $\lim_{x\to -\infty} \frac{x}{\sqrt{x^2+1}}$, e. $\lim_{x\to -\infty} \left(3x^3 - x^2 + 2\right)$, f. $\lim_{x\to -\infty} \frac{2x^2-x+3}{3x^2+5}$,
g. $\lim_{x\to \infty} \frac{x^3+1}{x^2+1}$, h. $\lim_{x\to \infty} \frac{5x+2}{2x^3-1}$.

Théorème de la bijection pour une fonction continue et strictement monotone.

31. Soit $f : I \to \mathbb{R}$ une fonction continue et strictement monotone sur un intervalle $I \subset \mathbb{R}$.

a. Énoncer le théorème de la bijection.

b. Montrer, en trouvant un contre-exemple, que l'hypothèse "continue" est nécessaire.

c. Montrer, en trouvant un contre-exemple, que l'hypothèse "strictement monotone" est nécessaire.

d. Montrer, en trouvant un contre-exemple, que l'hypothèse "la fonction est définie sur un intervalle" est nécessaire.

32. Soit $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par $f(x) = x^3 + x$. Montrer que f est bijective, tracer le graphe de f et f^{-1}.