1. a. Si on calcule le taux d'accroissement on trouve :

$$\frac{f(x+h)-f(x)}{h} = \frac{a(x+h)+b-ax-b}{h} = a.$$

Donc sa limite pour $h \to 0$ existe et elle est égale à a. La fonction $f(x)$ est donc dérivable en tout $x \in \mathbb{R}$ et sa dérivée est égale à la fonction constante a.
b. Le taux d'accroissement est égal à :

$$3x^2 + 3xh + h^2,$$

donc sa limite pour $h \to 0$ existe et elle est égale à $3x^2$.

2. Le taux d'accroissement de $f(x) = \sqrt{x}$ en $x = 0$ est égal à :

$$\frac{f(h)-f(0)}{h} = \frac{\sqrt{h}}{h} = \frac{1}{\sqrt{h}}.$$

Donc sa limite (à droite) pour $h \to 0^+$ n'existe pas finie.

3. L'équation de la droite tangente est :

$$y = 7(x-2) + 2.$$

4. Les points d'intersection de la courbe avec la droite sont donnés par les solutions du système

$$\begin{cases} y = -x, \\ y = x^3 - 6x^2 + 8x, \end{cases} \quad \sim \quad \begin{cases} y = -x, \\ x(x-3)^2 = 0. \end{cases}$$

Donc on a les deux point d'intersection

$$(0,0), \qquad (3,-3).$$

La pente de la droite tangente est donnée par la dérivée

$$y'(x) = 3x^2 - 12x + 8,$$

qui dans ces deux points vaux respectivement

$$y'(0) = 8, \qquad y'(3) = -1.$$

Donc la droite $y = -x$ est tangente à la courbe dans le point $(3,-3)$.

6. a. Si on impose la continuité en $x = c$

$$\lim_{x\to c^-} f(x) = \lim_{x\to c^+} f(x),$$

on trouve

$$b = c^2 - ac.$$

Si on impose la dérivabilité en $x = c$

$$\lim_{x\to c^-} f'(x) = \lim_{x\to c^+} f'(x),$$

on trouve

$$a = 2c.$$

Donc la fonction est dérivable si et seulement si

$$\begin{cases} a = 2c, \\ b = -c^2. \end{cases}$$

8. La somme géométrique $S(x) = \sum_{j=0}^{n} x^j$ peut être calculé avec l'astuce habituelle

$$(1-x)S(x) = 1 + x + \cdots + x^n - x(1 + x + \cdots + x^n) = 1 - x^{n+1}.$$

En prenant la dérivée de $S(x)$ on obtient :

$$S'(x) = \sum_{j=0}^{n} j x^{j-1} = \frac{d}{dx}\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

On a aussi

$$x\frac{d}{dx}(xS'(x)) = \sum_{j=0}^{n} j^2 x^j = x\frac{d}{dx}x\frac{d}{dx}\frac{1-x^{n+1}}{1-x}.$$

9. a. $D = \mathbb{R}$, $(x^3e^x)' = (x^3)'e^x + x^3(e^x)' = 3x^2e^x + x^3e^x = x^2e^x(3+x)$,
b. $D = \mathbb{R}^*$, $(1/x^2)' = (x^{-2})' = -2x^{-3} = -\frac{2}{x^3}$,
c. $\frac{x^2-1}{x+1} = x - 1$, donc...,
d. $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{2}\sin(2x)$, donc...,
h. $D = \mathbb{R}_+$, $\frac{1-x}{2\sqrt{x}(1+x)^2}$,
i. $D = \mathbb{R}_+$, $\frac{2+\sqrt{x}}{2(1+\sqrt{x})^2}$,
j. $D = \mathbb{R}$, $\frac{2x^5+9x^4+8x^3+3x^2+2x-3}{(x^4+x^2+1)^2}$,

11. a. Soit $f(x) = x^2e^x$. On vérifie simplement que

$$f'(x) = 2xe^x + x^2e^x, \qquad f''(x) = 2e^x + 4xe^x + x^2e^x, \qquad f'''(x) = 6e^x + 6xe^x + x^2e^x.$$

On peut vérifier par récurrence (ou utiliser la formule de Leibniz) que

$$\frac{d^n}{dx^n} f(x) = (x^2 + 2nx + n(n-1))e^x.$$

Plus en général on a que

$$\frac{d^n}{dx^n}(g(x)e^x) = e^x \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \frac{d^j}{dx^j} g(x)$$

pour toute fonction dérivable $g(x)$ un nombre suffisant de fois.

15. a. La limite donne est dans la forme indéterminée [0/0]. En utilisant le théorème de L'Hôpital :

$$\lim_{x\to 2} \frac{3x^2 + 2x - 16}{x^2 - x - 2} = \lim_{x\to 2} \frac{6x+2}{2x-1} = \frac{14}{3}.$$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{x}{(1+x)^n - 1} = [0/0] = \lim_{x\to 0} \frac{1}{n(1+x)^{n-1}} = \frac{1}{n}$.

c. Dans ce cas on trouve

$$\lim_{x\to 0} \frac{x - \tan x}{x - \sin x} = [0/0],$$

donc on utilise une première fois le théorème de L'Hôpital, et on obtient à nouveau une forme indéterminée

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-\tan^2 x}{1 - \cos x} = [0/0].$$

Si on utilise une deuxième fois le théorème de L'Hôpital on trouve

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\tan x\ (1 + \tan^2 x)}{\sin x} = [0/0],$$

et par la définition de la fonction tangente

$$= \lim_{x\to 0} \frac{-2\ (1 + \tan^2 x)}{\cos x} = -2.$$

d. 0

e. $\frac{1}{2}c(c-1)$

f. a^2/b^2

g. 1

h. 1/3

i. $b^{-1/2}$ pour $b > 0$

j. $1/24$

k. 1

17. a. La fonction $f(x) = x^2 - 3x + 2$ est un polynôme, donc l'ensemble de définition maximal de f est la droite réelle $\mathbb{R}$. Les limites au bord du domaine de définition sont

$$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = +\infty.$$

La dérivée est $f'(x) = 2x - 3$ donc il y a un point critique en $x = 3/2$. Puisque f' est strictement positive (resp. négative) pour $x > 3/2$ (resp. $x < 3/2$), la fonction f est strictement croissante (resp. décroissante) pour $x > 3/2$ (resp. $x < 3/2$). Donc $x = 3/2$ est un minimum global. Le graphe de f coupe l'axe des abscisses en deux points $x = 1$ et $x = 2$.