Intégrale des fonctions en escalier. Définition de fonction intégrable au sens de Riemann. Propriétés de l'intégrale. Primitives et intégrales. Primitives élémentaires.

1. Trouver pour chacune des fonctions suivantes une primitive et l'utiliser pour calculer l'intégrale $\int_1^2 f(x)dx$:
a. $f(x) = 5x^3$, b. $f(x) = 4x^2 - 12x$, c. $f(x) = (x+1)(x^3-2)$, d. $f(x) = \frac{x^4+x-3}{x^2}$,
e. $f(x) = \frac{1}{1+x^2}$, f. $f(x) = (1+\sqrt{x})^2$, g. $f(x) = 5e^t + e^{5t}$, h. $f(x) = \frac{2x^2-6x+7}{\sqrt{x}}$,
i. $f(x) = 2x^{\frac{1}{3}} - x^{-\frac{1}{3}}$, j. $f(x) = \sqrt{2x} + \sqrt{\frac{1}{2}x}$, k. $f(x) = 3\sin x + 2x^5$.

2. Calculer les intégrales suivantes :
a. $\int_0^x |t|dt$, b. $\int_0^x (t+|t|)^2 dt$.

3. Sans essayer d'évaluer les intégrales explicitement, calculer la dérivée des fonctions suivantes :
a. $f(x) = \int_0^x (1+t^2)^{-3}dt$, b. $g(x) = \int_0^{x^2} (1+t^2)^{-3}dt$, c. $h(x) = \int_{x^3}^{x^2} (1+t^2)^{-3}dt$.

Changement de variable.

4. Calculer par changement de variable les intégrales indéfinies suivantes :
a. $\int x^3\cos(x^4)dx$, b. $\int (\cos x)^2 \sin(x)dx$, c. $\int \frac{\sin(\sqrt{x})}{\sqrt{x}}dx$, d. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2}}dx$,
e. $\int \frac{x+1}{\sqrt{x^2+2x+3}}dx$, f. $\int \sqrt{2x+1}dx$, g. $\int x\sqrt{1+3x}dx$, h. $\int x^2\sqrt{x+1}dx$,
i. $\int \frac{x+1}{(x^2+2x+2)^3}dx$, j. $\int (\sin x)^3 dx$, k. $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$, l. $\int \frac{\cos x}{(\sin x)^3}dx$.

5. Calculer par changement de variable les intégrales suivantes :
a. $\int_{-2/3}^{1/3} \frac{x}{\sqrt{2-3x}}dx$, b. $\int_0^{\pi/4} \cos(2x)\sqrt{4-\sin(2x)}dx$, c. $\int \frac{\sin x}{\sqrt{(\cos x)^3}}dx$,
d. $\int_3^8 \frac{\sin\sqrt{x+1}}{\sqrt{x+1}}dx$, e. $\int x^{n-1}\sin(x^n)dx$, $n \neq 0$, f. $\int \frac{x^5}{\sqrt{1-x^6}}dx$,
g. $\int t(1+t)^{1/4}dt$, h. $\int (x^2+1)^{-3/2}dx$, i. $\int x^2(8x^3+27)^{2/3}dx$,
j. $\int \frac{\sin x + \cos x}{(\sin x - \cos x)^{1/3}dx}$, k. $\int \frac{x}{\sqrt{1+x^2+\sqrt{(1+x^2)^3}}}dx$, l. $\int \frac{(x^2+1-2x)^{1/5}}{1-x}dx$.

6. Montrer que, pour $x > 0$,

$$\int_x^1 \frac{1}{1+t^2}dt = \int_1^{1/x} \frac{1}{1+t^2}dt.$$

7. Soit $f : [-1,1] \to \mathbb{R}$ une fonction continue. En utilisant le changement de variable $u = \pi - x$, montrer que

$$\int_0^\pi x f(\sin x)dx = \frac{\pi}{2}\int_0^\pi f(\sin x)dx.$$

En déduire que

$$\int_0^\pi \frac{x\sin x}{1+(\cos x)^2}dx = \pi\int_0^1 \frac{1}{1+x^2}dx.$$

Intégration par parties.

8. Calculer, par intégration par parties, les intégrales suivantes :
a. $\int xe^{-x}dx$, b. $\int x\cos x dx$, c. $\int x^2\cos x dx$, d. $\int e^x\cos x dx$, e. $\int x\sin x dx$,
f. $\int x^2\sin x dx$, g. $\int x^3\cos x dx$, h. $\int (\sin x)^2 dx$, i. $\int \sin 3x\cos 5x dx$, j. $\int (\cos x)^3 dx$.

9. Calculer les primitives suivantes. On précisera sur quel intervalle on se place pour le calcul d'une telle primitive.
a. $\int \ln x dx$, b. $\int \sin(\ln x) dx$, c. $\int \frac{1}{2+3x}dx$, d. $\int (\ln x)^2 dx$, e. $\int x\ln(x) dx$,
f. $\int x^2\ln(x) dx$, g. $\int x(\ln x)^2 dx$, h. $\int_0^{e^3-1} \frac{1}{1+t}dt$, i. $\int \cot x dx$, j. $\int x^n\ln(ax) dx$,
k. $\int x^2(\ln x)^2 dx$, l. $\int \frac{1}{x\ln x}dx$, m. $\int \frac{\ln|x|}{x\sqrt{1+\ln|x|}}dx$, n. $\int \arctan(x) dx$.

Intégration de fonctions rationnelles.

10. Calculer les primitives suivantes :
a. $\int \frac{1}{2x+1}dx$, b. $\int \frac{1}{(x-1)^2}dx$, c. $\int \frac{1}{x^2-1}dx$, d. $\int \frac{1}{x^2+1}dx$, e. $\int \frac{1}{(x-1)(x-2)}dx$,
f. $\int \frac{2x+2}{x^2+2x+2}dx$, g. $\int \frac{1}{x^2+2x+2}dx$, h. $\int \frac{1}{4+9x^2}dx$, i. $\int \frac{1}{x^4+x^2+1}dx$, j. $\int \frac{1}{x(x+1)^2}dx$.

Calcul d'aires.

11. Calculer l'aire des domaines suivants du plan, en utilisant des intégrales :
a. $A = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \leqslant x \leqslant \frac{\pi}{4}, 0 \leqslant y \leqslant \tan(x)\right\}$,
b. $B = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 1 \leqslant x \leqslant 5, 0 \leqslant y \leqslant \frac{\sqrt{x-1}}{x}\right\}$,
c. $C = \left\{(x,y) \in \mathbb{R}^2 \middle| 0 \leqslant x \leqslant 1, 0 \leqslant y \leqslant \frac{e^{3x}}{1+e^{2x}}\right\}$.

Exercices facultatifs.

12. Calculer les primitives suivantes. On précisera sur quel intervalle on se place pour le calcul d'une telle primitive.
a. $\int \frac{1}{\sqrt{a^2-x^2}}dx,\ a \neq 0$, b. $\int \frac{1}{\sqrt{1-2x-x^2}}dx$, c. $\int \frac{1}{a^2+x^2}dx,\ a \neq 0$,
d. $\int \frac{1}{a+bx^2}dx,\ ab \neq 0$, e. $\int \frac{1}{x^2-x+2}dx$, f. $\int x\arctan x\ dx$,
g. $\int x^2\arccos x\ dx$, h. $\int x(\arctan x)^2 dx$, i. $\int \arctan\sqrt{x}\ dx$,
j. $\int \frac{1}{\sqrt{(x-a)(x-b)}}dx,\ a \neq b$, k. $\int \sqrt{1-x^2}dx$, l. $\int \frac{e^x}{1+e^{2x}}dx$.

13. Utiliser l'intégration par parties pour démontrer les formules :
a. $\int \sqrt{1-x^2}dx = x\sqrt{1-x^2} + \int \frac{x^2}{\sqrt{1-x^2}}dx$,
b. $\int (a^2-x^2)^n dx = \frac{1}{2n+1}x(a^2-x^2)^n + a^2\frac{2n}{2n+1}\int (a^2-x^2)^{n-1}dx$,
c. $\int \frac{(\sin x)^{n+1}}{(\cos x)^{m+1}}dx = \frac{1}{m}\frac{(\sin x)^n}{(\cos x)^m} - \frac{n}{m}\int \frac{(\sin x)^{n-1}}{(\cos x)^{m-1}}dx$,
d. $\int \frac{(\cos x)^{n+1}}{(\sin x)^{m+1}}dx = -\frac{1}{m}\frac{(\cos x)^n}{(\sin x)^m} - \frac{n}{m}\int \frac{(\cos x)^{n-1}}{(\sin x)^{m-1}}dx$,
e. $\int x^m(\ln x)^n dx = \frac{x^{m+1}(\ln x)^n}{m+1} - \frac{n}{m+1}\int x^m(\ln x)^{n-1}dx$.