Université de Bourgogne   U.F.R des Sciences et Techniques [1]

Pour débuter la fiche d'exercices sur les développements limités.

- **Quelques remarques**
  1. Première étape : étudier le cours !
  2. Comment calculer le développement d'une fonction f en un point x_0 donné ? Est-ce toujours possible ?
  3. Dans la pratique, on ramène le problème en 0 en considérant la fonction
  $$g(h) = f(x_0 + h).$$
  La notion de développement limité est une notion locale.
  4. La formule de Taylor-Young, qu'il faut connaître par cœur, est un des outils pour obtenir des développements limités. Mais d'une part, cette formule n'est pas toujours facile à écrire car le calcul des dérivées successives peut s'avérer périlleux et d'autre part, il existe des fonctions qui admettent des développements limités d'ordre 2 en x_0 alors qu'elles ne sont même pas deux fois dérivables en x_0 !
  5. Si f admet un développement à l'ordre $n \geq 0$ en x_0 (notation : $DL_n(x_0)$), f est nécessairement continue en ce point. Si $n \geq 1$, f est nécessairement dérivable en x_0. Mais si $n \geq 2$, f n'est pas nécessairement deux fois dérivable en x_0.
- **Il s'agit de déterminer des développements limités en** 0 **mais sans faire de calculs !** Vous devez réécrire les expressions données pour faire apparaître les développements demandés.
  1. $DL_3(0)$ de $u(x) = x^6 - 2x + x^3 - 2 + 8x^4 + 1$. Que vaut $u(0)$? $u'(0)$? Quelle est l'équation de la tangente au graphe de u en 0 ? Quelle est la position du graphe de u par rapport à cette tangente en 0 ?
  2. $DL_3(0)$ de $v(x) = x^5 - \dfrac{x^4}{1+x^2} - 2 + x^3\sqrt{|x|} + x - 6x^2$. Que vaut $v(0)$? $v'(0)$? Quelle est l'équation de la tangente au graphe de v en 0 ? Quelle est la position du graphe de v par rapport à cette tangente en 0 ?
  3. La fonction $w(x) = x^3 \sin\left(\dfrac{1}{x}\right)$ est prolongeable par continuité en 0 (Pourquoi et comment ?!). Donnez le $DL_2(0)$ de w. Que vaut $w'(0)$? On peut montrer que la fonction w n'est pas deux fois dérivable en 0...

  Voici des indications :

1. Licence Sciences L1, MaPC1A, U-Bourgogne 2022/2023

1. Il faut écrire $u(x)$, x proche de 0, sous la forme d'une somme d'un polynôme de degré ≤ 3 et d'un reste qui est négligeable devant x^3. On réorganise l'écriture de $u(x)$:

$$u(x) = -1 - 2x + x^3 + x^3(x^3 + 8x) = -1 - 2x + x^3 + x^3\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) = x^3 + 8x$ qui est une fonction qui tend vers 0 quand $x \to 0$. On a donc sans calcul que $u(0) = -1$ et $u'(0) = -2$. L'équation de la tangente au graphe de u en 0 (au point $(0, -1)$) est $y = -1 - 2x$. La position (locale) de la courbe par rapport à cette tangente est donnée par le signe de $u(x) - (-1 - 2x)$, soit le signe de x^3 au voisinage de 0.

2. Procéder comme ci-dessus , les termes négligeables devant x^3 étant regroupés dans $x^3\varepsilon(x)$.

3. La fonction w est le produit d'une fonction qui tend vers 0 quand $x \to 0$ par une fonction bornée. On peut écrire $w(x)$ de la façon suivante :

$$w(x) = x^2\left(x\sin\left(\frac{1}{x}\right)\right) = x^2\varepsilon(x)$$

où $\varepsilon(x) = x\sin\left(\frac{1}{x}\right)$ avec $\lim_{x\to 0}\varepsilon(x) = 0$! Ainsi $w(0) = w'(0) = 0$.

– **Polynôme de Taylor d'un polynôme !** Ecrivons le polynôme de Taylor de degré ≤ 3 de $P(x) = x^3$ en 1 que l'on note $T_{1;3}(x)$. On a $P'(x) = 3x^2$, $P''(x) = 6x$ et $P'''(x) = 6$, donc :

$$\begin{aligned} T_{1;3}(x) &= P(1) + (x-1)P'(1) + \frac{(x-1)^2}{2}P''(1) + \frac{(x-1)^3}{6}P'''(1) && (1)\\ &= 1 + 3(x-1) + 3(x-1)^2 + (x-1)^3 && (2)\\ &= (1 + (x-1))^3 && (3)\\ &= x^3. && (4) \end{aligned}$$

– **Taylor-Young ou pas Taylor Young ?** Une question : quel est le $DL_8(0)$ de $x \mapsto \frac{1}{1-x^3}$? Il est hors de question d'utiliser la formule de Taylor-Young. Heureusement, on connaît le développement limité de 0 à n'importe quel ordre de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$. On veut faire $u = x^3$, mais quel ordre choisir pour le développement limité en 0 de $u \mapsto \frac{1}{1-u}$?
Si on part de $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^2\varepsilon(u)$ ($\varepsilon(u)$ tend vers 0 quand $u \to 0$), alors $\frac{1}{1-x^3} = 1 + x^3 + x^6 + x^6\varepsilon(x^6)$, soit un $DL_6(0)$.
Si on part de $\frac{1}{1-u} = 1 + u + u^2 + u^2 + u^3 + u^4 + u^5 + u^6 + u^7 + u^8 + u^8\varepsilon(u)$, peut-être a-t-on choisi un ordre trop grand ? Mais ce n'est pas grave, juste maladroit, car alors :

$$\begin{aligned} \frac{1}{1-x^3} &= 1 + x^3 + x^6 + x^9 + x^{12} && (5)\\ &\quad + x^{15} + x^{18} + x^{21} + x^{24} + x^{24}\varepsilon(x^3) && (6)\\ &= 1 + x^3 + x^6 + x^8\Big(x + x^4 + x^7 && (7)\\ &\quad + x^{10} + x^{13} + x^{16} + x^{16}\varepsilon(x^3)\Big) && (8)\\ &= 1 + x^3 + x^6 + x^8\varepsilon_1(x) && (9) \end{aligned}$$

avec $\varepsilon_1(x)$ tend vers 0 quand $x \to 0$.

- **Un produit de deux développements limités** On cherche le $DL_5(0)$ de $x \mapsto \sin(x)\cos(2x)$. On connaît (?) les développements limités en 0 à tous les ordres des fonctions sin et cos (donc aussi de $x \mapsto \cos(2x)$). On a ainsi, au voisinage de 0 :

$$\sin(x)\cos(2x) = \left(x - \frac{x^3}{6} + \frac{x^5}{120} + x^5\varepsilon_1(x)\right) \tag{10}$$

$$\times \left(1 - 2x^2 + \frac{2x^4}{3} + x^5\varepsilon_2(x)\right). \tag{11}$$

  On développe tout en s'économisant ! Les termes négligeables devant x^5 sont placés dans une expression notée $x^5\varepsilon(x)$.

- Dans l'exercice 7) de la fiche 5, on utilise des DL pour calculer des limites. Par exemple, si on veut calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{1-\cos(x)}{x^2}$, on sait qu'au voisinage de 0,

$$\cos(x) = 1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x) \ (\lim_{x\to 0} \varepsilon(x) = 0)$$

  donc :

$$\frac{1-\cos(x)}{x^2} = \frac{1-(1-\frac{x^2}{2}+x^2\varepsilon(x))}{x^2} = \frac{1}{2} + \varepsilon(x).$$

  La limite cherché est donc 0.5.
  Calculer $\lim_{x\to 0} \dfrac{\sin(x)-x}{x^3}$ par cette méthode.