1. a. Par récurrence on a que

$$\sin^{(2n)}(x) = (-1)^n \sin(x), \qquad \sin^{(2n+1)}(x) = (-1)^n \cos(x),$$

donc

$$\sin^{(2n)}(0) = 0, \qquad \sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n,$$

et par la formule de Taylor

$$T_{0,2n+1}(x) = x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!} + \cdots + (-1)^n \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}.$$

Finalement

$$\sin(x) \sim x - \frac{x^3}{3!} + \frac{x^5}{5!}$$

donc par substitution

$$\sin(2x) \sim T_{0,5}(x) = 2x - \frac{(2x)^3}{3!} + \frac{(2x)^5}{5!}.$$

b. $T_{0,2}(x) = 1 + x^2 + \frac{1}{2}x^4$.
c. $T_{0,4}(x) = x - \frac{1}{2}x^3 + \frac{1}{5!}x^9$.

2. a. $T_{\pi,2}(x) = (x - \pi)$,
b. $T_{2,2}(x) = \frac{1}{\sqrt{3}} - \frac{x-2}{6\sqrt{3}} + \frac{(x-2)^2}{24\sqrt{3}}$,
c. $T_{1,100}(x) = 9 - (x-1) - 6(x-1)^2 + (x-1)^3$,
d. $T_{1,3}(x) = (x-1) - \frac{1}{2}(x-1)^2 + \frac{1}{3}(x-1)^3$.

3. a. On sait que la dérivée de $f(x) = e^x$ est e^x, donc $f^{(k)}(x) = e^x$ et $f^{(k)}(0) = 1$. Par définition de polynôme de Taylor :

$$T_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} \frac{1}{k!} x^k.$$

b. Par récurrence on observe que $f^{(k)}(x) = (-1)(-2)\cdots(-k)(1+x)^{-k-1}$, donc $f^{(k)}(0) = (-1)(-2)\cdots(-k) = (-1)^k k!$; on trouve

$$T_{0,n}(x) = \sum_{k=0}^{n} \frac{f^{(k)}(0)}{k!} x^k = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k x^k.$$

c. Puisque la dérivée de $\ln(1+x)$ est $(1+x)^{-1}$, on se ramène au cas précédent.

4. a. Par le théorème fondamental du calcul intégral

$$\int_0^x e^t dt = \left[e^t\right]_0^x = e^x - 1,$$

donc on obtient la première approximation

$$e^x = 1 + \int_0^x e^t dt.$$

En utilisant l'intégration par parties on a que

$$\int_0^x e^t dt = \left[(t-x)e^t\right]_0^x + \int_0^x (x-t)e^t dt = x + \int_0^x (x-t)e^t dt,$$

et que

$$\int_0^x (x-t)e^t dt = \left[-\frac{(x-t)^2}{2}e^t\right]_0^x + \frac{1}{2}\int_0^x (x-t)^2 e^t dt.$$

c. Puisque $e^{sx}(1-s)^2 \geqslant 0$, on a que

$$\int_0^1 e^{sx}(1-s)^2 ds \geqslant 0$$

donc $R_2(x) \leqslant 0$ si $x \leqslant 0$. Puisque $e^{sx} \leqslant 1$ si $sx \leqslant 0$ (et cela est vraie puisque $x \leqslant 0$ et $0 \leqslant s \leqslant 1$), on a aussi que

$$\int_0^1 e^{sx}(1-s)^2 ds \leqslant \int_0^1 (s-1)^2 ds = \left[\frac{(s-1)^3}{3}\right]_0^1 = \frac{1}{3},$$

donc $R_2(x) \geqslant \frac{x^3}{6}$.

d. Puisque $x = -t^2 \leqslant 0$, par substitution on trouve

$$e^{-t^2} = 1 - t^2 + \frac{t^4}{2} + R_2(-t^2), \qquad -\frac{t^6}{6} \leqslant R_2(-t^2) \leqslant 0.$$

En intégrant entre 0 et $\frac{1}{2}$ on obtient le résultat souhaité avec $\theta = -\int_0^{1/2} R_2(-t^2)dt$. L'inégalité $R_2(-t^2) \leqslant 0$ donne $\theta \geqslant 0$ et, en utilisant l'inégalité $R_2(-t^2) \geqslant -\frac{t^6}{6}$ on obteint

$$\theta = \int_0^{1/2} -R_2(-t^2)dt \leqslant \int_0^{1/2} \frac{t^6}{6}dt = \left[\frac{t^7}{6\cdot 7}\right]_0^{1/2} = \frac{1}{6\cdot 7\cdot 128}.$$

5. a. En utilisant le calcul vu précédemment

$$\sin^{(2n)}(0) = 0, \qquad \sin^{(2n+1)}(0) = (-1)^n,$$

on trouve le polynôme de Taylor

$$T_{0,2n}(x) = \sum_{k=1}^{n} \frac{(-1)^{k-1}x^{2k-1}}{(2k-1)!}$$

et par l'inégalité de Taylor-Lagrange

$$|\sin(x) - T_{0,2n}(x)| = |R_{2n}| \leqslant \frac{|x|^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

puisque $|\sin^{(2n+1)}(x)| \leqslant 1$ pour tout x.

7. a. Dans ce cas on trove la forme indéterminée $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \left[\frac{0}{0}\right]$. On remplace le développement $\cos x = 1 - \frac{x^2}{2} + o(x^3)$ pour $x \sim 0$ et on trouve

$$\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos x}{x^2} = \lim \frac{1 - 1 + \frac{x^2}{2} + o(x^3)}{x^2} = \lim \left(\frac{1}{2} + \frac{o(x^3)}{x^2}\right) = \frac{1}{2}.$$

b. $\lim_{x\to 0} \frac{1-\cos(2x)-2x^2}{x^4} = \lim \frac{1-(1-\frac{(2x)^2}{2}+\frac{(2x)^4}{24}+o(x^5))-2x^2}{x^4} = \lim \left(-\frac{2}{3} + \frac{o(x^5)}{x^4}\right) = -\frac{2}{3}$.

c. On a $\frac{\sin ax}{\sin bx} = \frac{ax+o(x)}{bx+o(x)} = \frac{a+\frac{o(x)}{x}}{b+\frac{o(x)}{x}}$ et puisque $\lim_{x\to 0} \frac{o(x)}{x} = 0$ on trouve que la limite est ègale à a/b.