Octobre 2022

1. Une petite remarque qui peut être très utile quand on cherche la limite en un point d'un produit de deux fonctions : si $\lim_{x\to a} u(x) = 0$ et si la fonction $x \mapsto v(x)$ est bornée au voisinage de a, alors $\lim_{x\to a} u(x)v(x) = 0$. On applique ce résultat à la recherche de la limite en 0 de la fonction $x \mapsto x \sin\left(\frac{1}{x}\right)$. On a vu aussi que $x \mapsto \sin\left(\frac{1}{x}\right)$, quant à elle, n'admet pas de limite en 0, en donnant à x des valeurs particulières ($x = \frac{1}{\frac{\pi}{2}+2k\pi}$, $x = \frac{1}{k\pi}$, k entier non nul).
2. Nous sommes revenus sur la définition d'une fonction continue en un point (f est définie en ce point et admet une limite en ce point qui est justement la valeur de la fonction en ce point). On fera attention que la continuité en un point n'implique pas la dérivabilité en ce point ! Par contre on a la réciproque. Il suffit de remarquer que :

$$f(x) = (x-a)\frac{f(x)-f(a)}{x-a} + f(a).$$

   Mais de toute façon dans l'étude d'une fonction, on commence par regarder si elle est continue ou non sur son ensemble de définition.
3. Si la fonction f tend vers l quand $x \to a$ et si g est une fonction continue en l (donc définie au voisinage de a), alors la fonction composée $g \circ f$ a pour limite $g(l)$ quand x tend vers a. Ce résultat nous a permis d'affirmer par exemple que $\lim\limits_{x\to 0} \frac{\sin(x^2)}{x^2} = 1$. Ici la fonction f est la fonction $x \mapsto x^2$ et g est la fonction continue (sur $\mathbb{R}$) définie par :

$$g(x) = \frac{\sin x}{x} \text{ si } x \neq 0,\ g(0) = 1.$$

   La fonction g est le prolongement par continuité en 0 de la fonction $x \mapsto \frac{\sin x}{x}$.
4. Mise en garde : dans un calcul de limite faisant intervenir plusieurs fonctions, on ne remplace pas une des fonctions par sa limite. On verra plus tard que dans certaines situations, on peut remplacer sans risque une fonction par un développement asymptotique. Par exemple si u tend vers 1 quand x tend vers 0, on ne peut pas écrire :

$$\lim_{x\to 0} \frac{1+x-u(x)}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{1+x-1}{x} = 1 \text{ !!!!!}$$

   Regardez ce qui se passe pour $u(x) = 1+x$, $u(x) = 1+x^2$, $u(x) = 1+\sqrt{x}$.

1. Licence Sciences L1, MaPC1A

5. L'image d'un intervalle par une fonction continue (en tous les points de l'intervalle) est un intervalle (non nécessairement de même nature). L'image d'un segment par une fonction continue est un segment.
6. Si f est continue et strictement croissante sur un intervalle I, $f(I)$ est un intervalle de même nature et f réalise une bijection bi-continue de I sur $f(I)$. Les graphes de f et f^{-1} sont symétriques, dans un repère orthonormé, par rapport à la première bissectrice (la symétrie est donnée par $(x, y) \mapsto (y, x)$).
7. On doit savoir calculer la dérivée d'une fonction composée : si $y = f(x)$ est dérivable en x_0, si $z = g(y)$ est dérivable en $y_0 = f(x_0)$ alors la fonction composée $g \circ f$ est dérivable en x_0 et :
$$(g \circ f)'(x_0) = g'(f(x_0)) \cdot f'(x_0).$$
On peut utiliser les notations de Leibniz pour mémoriser ce résultat :
$$\frac{dz}{dx} = \frac{dz}{dy} \cdot \frac{dy}{dx}.$$
8. On a prouvé que la dérivée de arctan, fonction réciproque de la fonction tangente restreinte à l'intervalle $\left]-\frac{\pi}{2}, \frac{\pi}{2}\right[$, est la fonction $x \mapsto \frac{1}{1+x^2}$. On a établi cela en dérivant les deux termes de l'égalité
$$\tan(\arctan(x)) = x.$$
On peut retrouver ce résultat par la démarche suivante qui utilise les notations de Leibniz :
$$y = \arctan(x), \quad x = \tan(y)$$
$$\frac{dy}{dx} = \frac{1}{\frac{dx}{dy}} = \frac{1}{1 + \tan^2(y)} = \frac{1}{1+x^2}.$$
On en déduit (par exemple) :
$$\int_0^1 \frac{dt}{1+t^2} = [\arctan(t)]_0^1 = \arctan(1) - \arctan(0) = \cdots$$
9. (Point critique) Vous rencontrerez dans vos études, dans plusieurs branches des Sciences, la notion de *singularité*. Dans le cadre des fonctions d'une variable réelle, on a un exemple de cette notion : la notion de *point critique*. On dit que x_0 est un point critique d'une fonction f dérivable sur un intervalle ouvert contenant x_0 si $f'(x_0) = 0$.

   Les fonctions $x \mapsto x^2$ et $x \mapsto x^3$ admettent comme seul point critique 0. Par contre, la fonction sin admet une infinité de points critiques, ce sont les x tels que $\cos(x) = 0$, c'est-à-dire $x = \ldots$
10. (Extremum local) **On travaille uniquement sur des intervalles ouverts**. On dit que f admet un *minimum local* en x_0, s'il existe un intervalle ouvert centré en x_0 tel que pour tout x dans cet intervalle $f(x_0) \leq f(x)$.

Un extremum local est nécessairement un point critique. En effet le taux d'accroissement $\dfrac{f(x)-f(x_0)}{x-x_0}$ change de signe au passage de x_0 donc s'annule ! (en x_0, la valeur du taux est la valeur limite $f'(x_0)$). Attention, la réciproque est fausse : 0 est un point critique de $x \mapsto x^3$ mais cette fonction n'admet pas d'extremum local en 0.

Si f est une fonction suffisamment régulière au voisinage ouvert de x_0, on retiendra que :

(a) si $f'(x_0) = 0$ et si $f''(x_0) > 0$ alors f possède un minimum local en x_0 ;

(b) si $f'(x_0) = 0$ et si $f''(x_0) < 0$ alors f possède un maximum local en x_0.

Déterminer les points critiques puis les extrema de $y = x^3 - x^2 - 3x$, puis de $y = \dfrac{x}{1+x^2}$ (fait en Tds).