Cinq exercices corrigés (limites, dérivation, intégration, développements limités) L1 MaPC1A, 2022-2023

27 novembre 2022

exercice 1

Déterminer :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\tan(2x)(e^{3x}-1)}{\ln(1+x^2)},\quad \lim_{x\to+\infty} x(2^{\frac{1}{x}}-1).$$

Correction 1

On sait que :

$$\lim_{x\to 0}\frac{\sin x}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{e^x-1}{x}=1,\ \lim_{x\to 0}\frac{\ln(1+x)}{x}=1.$$

Ces résultats nous guident :

$$\frac{\tan(2x)(e^{3x}-1)}{\ln(1+x^2)}=\frac{6}{\cos 2x}\times\frac{\sin 2x}{2x}\times\frac{e^{3x}-1}{3x}\times\frac{x^2}{\ln(1+x^2)}$$

et

$$x(2^{\frac{1}{x}}-1)=\frac{e^{\frac{\ln(2)}{x}}-1}{\frac{1}{x}}=\ln(2)\times\frac{e^{\frac{\ln(2)}{x}}-1}{\frac{\ln(2)}{x}}.$$

exercice 2

1. Déterminer une primitive sur $I\!R$ de la fonction $x\mapsto x^2e^{2x+1}$.

Correction 2

On intégre deux fois par parties :

$$\begin{aligned}\int x^2e^{2x+1}dx &= \frac{1}{2}x^2e^{2x+1}-\frac{1}{2}\int 2xe^{2x+1}dx\\ &= \frac{1}{2}x^2e^{2x+1}-\int xe^{2x+1}dx\\ &= \frac{1}{2}x^2e^{2x+1}-(\frac{1}{2}xe^{2x+1}-\frac{1}{2}\int e^{2x+1}dx)\\ &= \frac{1}{2}x^2e^{2x+1}-(\frac{1}{2}xe^{2x+1}-\frac{1}{4}e^{2x+1})\\ &= (\frac{1}{2}x^2-\frac{1}{2}x+\frac{1}{4})e^{2x+1}.\end{aligned}$$

2. Quelle est la dérivée sur $I\!\!R$ de la fonction arctan ? Calculer les primitives (sur $I\!\!R$) suivantes :

$$\int \frac{dx}{5+x^2}, \quad \int \frac{dx}{x^2+2x+6}.$$

Correction 3
On a :

$$\int \frac{dx}{5+x^2} = \frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2}$$

On pose : $u = x/\sqrt{5}$, soit $du = dx/\sqrt{5}$, puis :

$$\frac{1}{5}\int \frac{dx}{1+\left(\frac{x}{\sqrt{5}}\right)^2} = \frac{1}{5}\int \frac{\sqrt{5}du}{1+u^2} = \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan(u) + K = \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan(\frac{x}{\sqrt{5}}) + K.$$

On remarque que $x^2+2x+6 = (x+1)^2+5$ d'où :

$$\int \frac{dx}{x^2+2x+6} = \int \frac{dx}{(x+1)^2+5}.$$

On pose alors $u = x+1$, soit $du = dx$:

$$\int \frac{dx}{(x+1)^2+5} = \int \frac{du}{u^2+5} = \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan(\frac{u}{\sqrt{5}}) + K = \frac{\sqrt{5}}{5}\arctan(\frac{x+1}{\sqrt{5}}) + K.$$

3. Calculer l'intégrale suivante :

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx.$$

Correction 4
Comme $2x$ est la dérivée de x^2, on pose : $u = x^2$, soit $du = 2xdx$ et :

$$\int_0^{\sqrt{3}} x\sqrt{x^2+1}dx = \frac{1}{2}\int_0^3 \sqrt{u+1}du = \frac{1}{2}\left[\frac{2}{3}(u+1)^{\frac{3}{2}}\right]_0^3 = \frac{7}{3}.$$

exercice 3
Soit la fonction $f : x \mapsto x\sqrt{1-x^2}$.

1. Quel est le domaine de définition D_f de f ?
2. Sur quel intervalle f est-elle continue ? Sur quel intervalle f est-elle dérivable ?
3. Calculer la dérivée de f et étudier les variations de f.
4. La fonction f admet-elle des extrema ? Si oui, donner leur nature.
5. On se place au voisinage de 0. Calculer le développement limité à l'ordre 3 en 0 de la fonction f. En déduire l'équation de la tangente au graphe de f au point $(0, 0)$ et la position de la courbe par rapport à cette tangente au voisinage de 0.

Correction 5

1. Le réel x est dans le domaine de définition de f si $1-x^2 \geq 0$, c'est-à-dire si $x^2 \leq 1$, soit $|x| \leq 1$.
2. La fonction f est continue sur son domaine de définition comme composée de fonctions continues. Pour la dérivation, il faut faire attention au fait que la fonction racine carrée si elle continue sur $[0,+\infty[$, son domaine de dérivabilité est l'intervalle $]0,+\infty[$.
3. Pour dériver correctement f, on doit savoir calculer la dérivée d'un produit de deux fonctions et connaître la formule $(u^\alpha)' = \alpha u^{\alpha-1}u'$:
$$f'(x) = \sqrt{1-x^2} + x \times \frac{1}{2}(1-x^2)^{-\frac{1}{2}} \times (-2x) = \frac{1-2x^2}{\sqrt{1-x^2}}.$$
Les valeurs qui annulent la dérivée f' (les points critiques) sont les points $-1/\sqrt{2}$ et $1/\sqrt{2}$. La dérivée est du signe de $1-2x^2 = -2(x+\frac{\sqrt{2}}{2})(x-\frac{\sqrt{2}}{2})$. On aurait pu remarquer aussi que f est une fonction impaire ce qui permet de réduite l'intervalle d'étude.
4. La fonction f présente un maximum local au point $1/\sqrt{2}$ et un minimum local au point $-1/\sqrt{2}$
5. On sait que :
$$\sqrt{1-u} =_0 \ 1 - \frac{u}{2} + u\varepsilon(u), \ \lim_{u\to 0} \varepsilon(u) = 0.$$
Ainsi on a :
$$x\sqrt{1-x^2} =_0 \ x(1 - \frac{x^2}{2} + x^2\varepsilon(x^2)) = x - \frac{x^3}{2} + x^3\varepsilon(x^2).$$
L'équation de la tangente au graphe de f au point $(0,0)$ est $y = x$ et la position de la courbe est donné par le signe de $f(x) - x$, c'est-à-dire par celui de $-x^3$.