MaPC1A - CC 16-11-2023

① $|x-1| + |x-7| = 8$

- $x \geqslant 7$: $x - 1 + x - 7 = 8 \Rightarrow x = 8$
- $1 \leqslant x < 7$: $x - 1 - x + 7 = 8$ IMP
- $x < 1$: $-x + 1 - x + 7 = 8 \Rightarrow x = 0$

$S = \{ 8 ; 0 \}$

② $\sin(x)\cos(x) = \frac{1}{4} \Leftrightarrow \sin(2x) = \frac{1}{2}$

$\Leftrightarrow 2x = \frac{\pi}{6} + 2\pi k$ ou $2x = \frac{5}{6}\pi + 2\pi k$, $k \in \mathbb{Z}$

$S = \left\{ \frac{\pi}{12} + \pi k \; ; \; \frac{5}{12}\pi + \pi k \text{ pour } k \in \mathbb{Z} \right\}$

③ a) $\lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5x^2 + 3x}{3 + 5x} = \left[\frac{+\infty - \infty}{3 - \infty} \right] =$

$= \lim\limits_{x \to -\infty} \frac{5x + 3}{5x + 3} x = \lim\limits_{x \to -\infty} x = -\infty$

b) $\lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{\cos\left(\frac{\pi}{2}\sin(x)\right)}{x - \frac{\pi}{2}} = \left[\frac{0}{0} \right] =$

$= \lim\limits_{x \to \pi/2} \frac{-\sin\left(\frac{\pi}{2}\sin(x)\right) \cdot \frac{\pi}{2}\cos(x)}{1} = 0$

c) $\lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\ln(1+\sin(x))}{\sin(3x)} = \left[\dfrac{0}{0}\right] =$

$= \lim\limits_{x \to 0} \dfrac{\cos(x)}{1+\sin(x)} \cdot \dfrac{1}{\cos(3x) \cdot 3} = \dfrac{1}{3}$

4 a) $a(x) = \cos(x) \ln(x-1)$

$D_a =]1, +\infty[$ – domaine de définition et de dérivabilité

$a'(x) = -\sin(x) \ln(x-1) + \cos(x) \dfrac{1}{x-1}$

b) $b(x) = \sin(\sin(x))$

$D_b = \mathbb{R}$ – domaine de définition et de dérivabilité

c) $c(x) = \arctan(x) + a \arctan(1/x)$

$\left.\begin{array}{ll} D_c = \mathbb{R}^* & \text{pour } a \neq 0 \\ D_c = \mathbb{R} & \text{pour } a = 0 \end{array}\right\}$ domaine de définition et de dérivabilité

Pour $x \to 0^{\pm}$, $c \to \pm a \dfrac{\pi}{2}$ donc elle n'est pas prolongeable par continuité en $x = 0$ si $a \neq 0$.

$c'(x) = \dfrac{1}{1+x^2} + a \dfrac{1}{1+\frac{1}{x^2}} \cdot \dfrac{-1}{x^2} =$

$= \dfrac{1-a}{1+x^2}$

5. $h(x) = \frac{1}{(x-1)(x-3)}$

a) $D_h = \mathbb{R} \setminus \{1 ; 3\}$

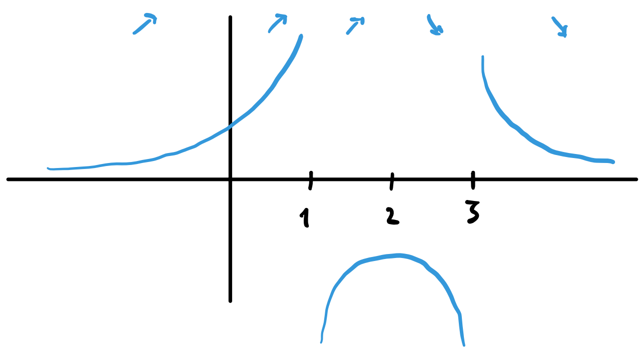
b) $\lim\limits_{x \to +\infty} h = 0$ $\qquad$ $\lim\limits_{x \to -\infty} h = 0$

$$\lim_{x \to 1^{\pm}} h = \left[\frac{1}{0^{\pm} \cdot (-2)}\right] = \mp \infty$$

$$\lim_{x \to 3^{\pm}} h = \left[\frac{1}{2 \cdot 0^{\pm}}\right] = \pm \infty$$

c) $h'(x) = \frac{-(2x-4)}{(x-1)^2(x-3)^2} = 0 \iff x = 2$

d) $h'(x) > 0 \iff -2x + 4 > 0 \iff x < 2$



$x = 0$ maximum local (par global)

⑥ $f : [0, 2] \to \mathbb{R}$ $\qquad f(x) = x^3 + x$

a) $f'(x) = 3x^2 + 1 > 0 \quad \Rightarrow$ f strictement croissante

b) ensemble image $\quad I = [f(0), f(2)] = [0, 10]$

c) $f : [0, 2] \to I$ est strictement croissante donc injective

et f est surjective car I est l'image.

d) $y = 2 \qquad f(x) = 2 \qquad x^3 + x = 2 \quad \Rightarrow \quad x = f^{-1}(2) = 1$

e) $$f^{-1\,\prime}(2) = \frac{1}{f'(f^{-1}(2))} = \frac{1}{3x^2+1}\bigg|_{x=1} = \frac{1}{4}$$