

1 - Rappels

Solutions à la feuille de TD

1. g. Si $x = 0,1212\dots$, on vérifie facilement que $100x = 12 + x$. Donc $x = \frac{12}{99} \in \mathbb{Q}$.

2. On a évidemment la même démonstration utilisée pour montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, il faut simplement changer 2 avec 3 et le mot "pair" avec "multiple de 3" : Par l'absurde, soit $\sqrt{3}$ égal au nombre rationnel p/q , avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. On peut toujours choisir p et q pas les deux multiples de 3. En prenant le carré on trouve

$$3 = \frac{p^2}{q^2}, \quad \text{donc} \quad 3q^2 = p^2,$$

donc p^2 est un multiple de 3. On peut montrer que p est aussi un multiple de 3, donc $p = 3\tilde{p}$ pour un naturel \tilde{p} . En substituant dans l'équation précédente, on trouve

$$q^2 = 3\tilde{p}^2,$$

mais alors q est aussi un multiple de 3, mais on avait déjà exclu cette possibilité. Donc on trouve une contradiction et on peut conclure que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.

Il reste à montrer que "si p^2 est multiple de 3 alors même p est multiple de 3". Une façon de le faire est d'utiliser la démonstration par contraposée, c.-à-d. montrer l'énoncé équivalente "si p n'est pas multiple de 3, alors p^2 n'est pas multiple de 3". Si p n'est pas multiple de 3 alors il est égal à $3\tilde{p} + 1$ ou $3\tilde{p} + 2$ pour un naturel \tilde{p} . En prenant le carré

$$p^2 = (3\tilde{p} + 1)^2 = 9\tilde{p}^2 + 6\tilde{p} + 1$$

ou

$$p^2 = (3\tilde{p} + 2)^2 = 9\tilde{p}^2 + 12\tilde{p} + 4,$$

on trouve que p^2 n'est pas un multiple de 3.

5. a. $]4, +\infty[$

b. $] - \infty, 3/7[$

7. a. $]1, 3[$

b. $] - \infty, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}[\cup]1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$

8. c. $x = 0$

e. \emptyset ; et si on remplace 7 avec 4 on trouve l'intervalle $[1, 4]$.

9. e. $] -\infty, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})[\cup]\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), +\infty[.$

10. Soit $|x| \geq |y|$. Il faut montrer que

$$-|x - y| \leq |x| - |y| \leq |x - y|.$$

À partir de l'inégalité triangulaire $|a + b| \leq |a| + |b|$, en posant $a = x - y$ et $b = -x$, on trouve la première inégalité. En posant $a = x - y$ et $b = y$ on trouve la deuxième.

14. c. $x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x - 1) - 4(x - 1) = (x^2 - 4)(x - 1) = (x - 2)(x + 2)(x - 1).$

15. b. Ajouter et soustraire $5x - 3$ au numérateur.

17. c. $\frac{1}{\sqrt{3}}$