1. g. Si $x = 0,1212...$, on vérifie facilement que $100x = 12 + x$. Donc $x = \frac{12}{99} \in \mathbb{Q}$.
i. Soit $x = 0,999....$ On a $10x = 9 + x$, donc $9x = 9$, c'est-à-dire $x = 1$. Le nombre x est donc un entier naturel : $x \in \mathbb{N}$.

2. On a évidemment la même démonstration utilisée pour montrer que $\sqrt{2}$ n'est pas rationnel, il faut simplement changer 2 avec 3 et le mot "pair" avec "multiple de 3" :
Par l'absurde, soit $\sqrt{3}$ égal au nombre rationnel p/q, avec $p, q \in \mathbb{N}^*$. On peut toujours choisir p et q pas les deux multiples de 3. En prenant le carré on trouve

$$3 = \frac{p^2}{q^2}, \quad \text{donc} \quad 3q^2 = p^2,$$

donc p^2 est un multiple de 3. On peut montrer que p est aussi un multiple de 3, donc $p = 3\tilde{p}$ pour un naturel $\tilde{p}$. En substituant dans l'équation précédente, on trouve

$$q^2 = 3\tilde{p}^2,$$

mais alors q est aussi un multiple de 3, mais on avais déjà exclu cette possibilité. Donc on trouve une contradiction et on peut conclure que $\sqrt{3}$ n'est pas rationnel.
Il reste à montrer que "si p^2 est multiple de 3 alors même p est multiple de 3". Une façon de le faire est d'utiliser la démonstration par contraposée, c.-à-d. montrer l'énoncé équivalente "si p n'est pas multiple de 3, alors p^2 n'est pas multiple de 3". Si p n'est pas multiple de 3 alors il est égal à $3\tilde{p} + 1$ ou $3\tilde{p} + 2$ pour un naturel $\tilde{p}$. En prenant le carré

$$p^2 = (3\tilde{p} + 1)^2 = 9\tilde{p}^2 + 6\tilde{p} + 1$$

ou

$$p^2 = (3\tilde{p} + 2)^2 = 9\tilde{p}^2 + 12\tilde{p} + 2,$$

on trouve que p^2 n'est pas un multiple de 3.

4. a. La phrase est équivalente à

$$\forall x \in \mathbb{R}, x^2 > 0.$$

Évidemment la phrase est fausse, car si $x = 0$ alors $x^2 = 0$, donc x^2 n'est pas strictement positif. La négation de la phrase est

"Il existe un nombre réel tel que son carré n'est pas strictement positif",

qui peut être écrite comme

$$\exists x \in \mathbb{R} \mid x^2 \leqslant 0.$$

Cette phrase est vraie, car le nombre réel zéro vérifie l'inégalité.

5. a. $]4, +\infty[$
b. $]-\infty, 3/7]$

6. a. $[1, 2]$

7. a. $]2, 3[$
b. $]-\infty, 1 - \frac{1}{\sqrt{2}}[\ \cup\ ]1 + \frac{1}{\sqrt{2}}, +\infty[$

8. c. La solution est $x = 0$. Pour résoudre des équations avec la valeur absolue, il faut considérer les différents cas. L'équation est equivalente à

$$x - 2 = |x + 2| \quad \text{si } x \geqslant 2,$$

autrement à

$$-x + 2 = |x + 2| \quad \text{si } x < 2.$$

Dans le premier cas, on a que $x + 2 \geqslant 0$, donc l'équation dévient

$$x - 2 = x + 2$$

qui n'a pas de solution. Dans le deuxième cas on a

$$-x + 2 = x + 2 \quad \text{si } x \geqslant -2,$$

qui a comme solution $x = 0$, qui satisfait aussi les deux conditions $0 < 2$ et $0 \geqslant -2$; autrement on a

$$-x + 2 = -x - 2 \quad \text{si } x < -2$$

qui n'a pas de solution.
e. $\varnothing$; et si on remplace 7 avec 4 on trouve l'intervalle $[1, 4]$.

9. e. $]-\infty, \frac{1}{2}(1 - \sqrt{5})[\ \bigcup\ ]\frac{1}{2}(1 + \sqrt{5}), +\infty[$.

10. Soit $|x| \geqslant |y|$. Il faut montrer que

$$-|x - y| \leqslant |x| - |y| \leqslant |x - y|.$$

À partir de l'inégalité triangulaire $|a + b| \leqslant |a| + |b|$, en posant $a = x - y$ et $b = -x$, on trouve la première inégalité. E posant $a = x - y$ et $b = y$ on trouve la deuxième.

11. $y = 3x - 3$, $y = -\frac{1}{3}x + \frac{11}{3}$.

13. d. $(a + b)^3 = a^3 + 3a^2b + 3ab^2 + b^3$,
e. $a^3 - b^3 = (a - b)(a^2 + ab + b^2)$.

14. c. $x^3 - x^2 - 4x + 4 = x^2(x - 1) - 4(x - 1) = (x^2 - 4)(x - 1) = (x - 2)(x + 2)(x - 1)$.

15. a. En faisant la division, on trouve

$$x^3 - 1 = (x^2 - 2)x + 2x - 1$$

donc le quotient est x et le reste est $2x - 1$.
b. Ajouter et soustraire $5x - 3$ au numérateur.

17. c. $\frac{1}{\sqrt{3}}$

18. a. On utilise les formules

$$\sin(x + y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y), \qquad \cos(\pi/2 - x) = \sin(x).$$

La deuxième formule donne aussi

$$\sin(\pi/2 - x) = \cos(x).$$

En posant $a = \pi/2 - x$ et $b = y$, on trouve

$$\begin{aligned} \cos(x - y) &= \sin(\pi/2 - x + y) = \sin(a + b) \\ &= \sin(a)\cos(b) + \cos(a)\sin(b) \\ &= \sin(\pi/2 - x)\cos(y) + \sin(\pi/2 - x)\sin(y) \\ &= \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y). \end{aligned}$$

b. On pose $x = \pi$ dans la formule précédente.

19. a. $\frac{\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$ et $\frac{5\pi}{18} + \frac{2\pi k}{3}$ pour $k \in \mathbb{Z}$.
b. On pose $y = \sin(x)$ et on trouve que y doit être égal à 1 ou à -3. Le deuxième cas étant impossible (le sinus ne peut jamais atteindre la valeur -3), il faut résoudre l'équation $\sin(x) = 1$, qui a comme solution $x = \frac{\pi}{2} + 2\pi k$ pour $k \in \mathbb{Z}$.