Ensembles des nombres réels, rationnels, entiers, naturels. Langage de la logique et des ensembles. Un nombre est rationnel si et seulement si il admet une écriture décimale périodique. Démonstration de l'irrationalité de la racine carrée de deux. Raisonnement par contraposée et par l'absurde.

1. Dire si les nombres suivants sont naturels, entiers, rationnels ou réels. Écrire les fractions qui correspondent aux nombres rationnels.
a. $0,125453$ b. -27 c. $-27,1$ d. $\sqrt{2} \simeq 1,4142...$ e. $\sqrt{4}$ f. $\pi \simeq 3,1415...$
g. $0,121212...$ (périodique) h. $e \simeq 2,7182...$ (constante de Néper) i. 0,9999...

2. Montrer que $\sqrt{3} \notin \mathbb{Q}$. Dire quand on utilise le raisonnement par contraposée ou par l'absurde.

3. Exprimer les symbols suivants en français : $\Longrightarrow$, $\Longleftrightarrow$, $\forall$, $\exists$, $\in$, $\subset$, $\varnothing$, $\cup$, $\cap$.

4. Écrire à l'aide des quantificateurs les phrases suivantes :

a. Pour tout nombre réel, son carré est strictement positif.

b. Il existe un nombre naturel n tel que n^4 soit plus grand que 100.

Puis écrire la négation de chaque phrase. Dire si chaque assertion est vraie ou fausse.

Droite réelle. Propriétés d'ordre des réels. Intervalles. Inéquations.

5. Résoudre les inéquations suivantes. Exprimer le résultat sous la forme de intervalle.
a. $2x - 1 > x + 3$, b. $-\frac{x}{3} \geqslant 2x - 1$, c. $\frac{2}{x-1} \geqslant 5$, d. $\frac{3}{x-1} < -\frac{2}{x}$.

6. Résoudre les systèmes des inéquations suivants :
a. $3 \leqslant 2x + 1 \leqslant 5$, b. $3x - 1 < 5x + 3 \leqslant 2x + 15$.

7. Résoudre les inéquations quadratiques suivantes :
a. $x^2 - 5x + 6 < 0$, b. $2x^2 + 1 > 4x$, c. $x^2 - 2x \leqslant 0$.

Valeur absolue. Équations et inéquations avec la valeur absolue.

8. Résoudre les équations suivantes :
a. $|x| = 2$, b. $|x-3| = 2$, c. $|x-2| = |x+2|$, d. $|x-7| = x-3$, e. $|x-1|+|x-7| = 3$.

9. Résoudre les inéquations suivantes :
a. $|x| \leqslant 3$, b. $|x-3| \leqslant 5$, c. $|x+4| \geqslant 1$, d. $|x+3| \leqslant 2-x$, e. $|x^2-x| > 1$.

10. Montrer que $||x| - |y|| \leqslant |x - y|$, à partir de l'inégalité triangulaire.

Produit et plan cartésien. L'équation de la droite. Distance entre deux points.

11. Écrire l'équation de la droite dans le plan cartésien qui passe par les points de cordonnées $(1, 0)$ et $(2, 3)$. Trouver le coefficient directeur et l'ordonnée à l'origine de la droite. Determiner l'équation de la perpendiculaire à ce droite passant par le point de cordonnées $(2, 3)$.

12. Calculer la distance entre les points $(3, -3)$ et $(-1, 2)$ du plan cartésien.

Polynômes et fonctions rationnelles. Division de polynômes.

13. Rappeler les identités remarquables suivantes :
a. $(a-b)^2$, b. a^2-b^2, c. $(a+b)^2$, d. $(a+b)^3$, e. a^3-b^3, f. a^3+b^3.

14. Trouver les racines des polynômes suivants :
a. $x^2-3x-10$, b. $x^4+6x^3+9x^2$, c. x^3-x^2-4x+4.

15. Donner le quotient et le reste des divisions suivantes :
a. $\frac{x^3-1}{x^2-2}$, b. $\frac{x^2}{x^2+5x+3}$.

16. Sans faire la division, vérifier que les polynômes suivants sont divisibles par le polynôme $x-1$. Puis, en faisant la division, les factoriser.
a. x^3+x^2-3x+1, b. x^4+x^3-x-1.

Trigonométrie et fonctions circulaires.

17. Calculer les valeurs suivantes :
a. $\cos(-\pi/6)$, b. $\sin(3\pi/4)$, c. $\tan(7\pi/6)$.

18. Montrer les identités trigonométriques suivantes :
a. $\cos(x-y) = \cos(x)\cos(y) + \sin(x)\sin(y)$, b. $\cos(\pi - x) = -\cos(x)$,
c. $\sin(\frac{\pi}{2} - x) = \cos(x)$, d. $\sin(2x) = 2\sin(x)\cos(x)$, e. $\cos(2x) = 1 - 2\sin^2(x)$,
f. $\tan(x+y) = \frac{\tan(x)+\tan(y)}{1-\tan(x)\tan(y)}$, g. $\cos(x) + \cos(y) = 2\cos((x+y)/2)\cos((x-y)/2)$.

19. Résoudre les équations et inéquations trigonométriques suivantes :
a. $\sin(3x) = \frac{1}{2}$, b. $\sin^2(x) + 2\sin(x) - 3 = 0$, c. $2(\cos^2(x) - \sin^2(x)) = 1$,
d. $\sin(2x) + \sqrt{3}\cos(2x) = 0$, e. $\cos(x) - \cos(2x) = \sin(3x)$, f. $\cos^2(t) = 1/4$,
g. $\sin(2s) = \cos^2(s)$, h. $\sin(\pi x) = 0$, i. $\sin(2t) < 0$, j. $\cos^2(x) \geqslant 1/4$.

$$\cos(\pi/2 - x) = \sin(x), \qquad \sin(x+y) = \sin(x)\cos(y) + \cos(x)\sin(y).$$