2. a. $f(g(y)) = \frac{2}{y^2} + \frac{20}{y} + 47$, $D_{f\circ g} = \mathbb{R}^*$.
b. $g(f(x)) = 5 + (2x^2 - 3)^{-1}$, $D_{g\circ f} = \mathbb{R} \setminus \{\pm\sqrt{3/2}\}$.

3. a. $D = \mathbb{R}$, $f(D) = [-1, 1]$.
b. $D =]0, +\infty[$, $f(D) = \mathbb{R}$.
c. $D = \mathbb{R}$, $f(D) = [\xi(\xi - 2), +\infty[$ où $\xi < 0$ est la seule solution de $e^\xi + 2\xi = 0$.

4. a. $\mathbb{R} \setminus \{1\}$, b. $[2, +\infty[$, c. $] - 5, +\infty[$, d. $] - \infty, -2[\cup]2, +\infty[$.

6. Si les deux fonctions sont paires, on a que

$$f(-x) = f(x), \qquad g(-x) = g(x),$$

pour tout $x \in \mathbb{R}$. On a que

$$(f + g)(-x) = f(-x) + g(-x) = f(x) + g(x) = (f + g)(x)$$

donc la somme $f + g$ est paire. Le produit fg et la fonction composée sont aussi paires, car

$$(fg)(-x) = f(-x)g(-x) = f(x)g(x) = (fg)(x),$$

et

$$(f \circ g)(-x) = f(g(-x)) = f(g(x)) = (f \circ g)(x).$$

Si f est paire et g impaire il faut juste changer des signes dans ces égalités. On trouve que fg et $f \circ g$ sont paires, mais $f + g$ n'est ni paire ni impaire. Si les deux fonctions f et g sont impaires, alors $f + g$ et $f \circ g$ sont impaires et fg est paire.

9. C'est évident que $f(x)$ est minorée par -1, car la fonction $\frac{2x^2}{x^2+1}$ est positive. Pour montrer que $f(x)$ est majorée par 1 on peut écrire l'inégalité $f(x) \leqslant 1$ dans la forme équivalente

$$\frac{x^2}{x^2 + 1} \leqslant 1.$$

En multipliant par le nombre strictement positif $x^2 + 1$ on trouve l'inégalité équivalente

$$x^2 \leqslant x^2 + 1$$

qui est vérifiée pour tout x. Enfin, pour montrer que $f(x)$ est majorée par x^2, on re-écrit l'inégalité $f(x) \leqslant x^2$ comme dans le cas précédent, en trouvant

$$0 \leqslant x^4 + 1.$$

10. Puisque $1 + x^2 > 0$ pour tout x, $|f(x)|$ est majorée par $1/2$ si et seulement si $1 + x^2 \geqslant 2|x|$. Si $x \geqslant 0$, cette condition devient $1 + x^2 \geqslant 2x$, ou $x^2 - 2x + 1 \geqslant 0$, ou $(x-1)^2 \geqslant 0$, qui est évidemment vraie pour tout x. Dans la même façon on prouve le cas $x < 0$.

11. Soient $x < y < 0$. Pour montrer que $f(x) = 1/x$ est strictement décroissante sur $]-\infty, 0[$ il faut vérifier que $f(x) > f(y)$, c'est-à-dire que $1/x > 1/y$. En multipliant par $xy > 0$, cette inégalité est équivalente à $y > x$. Dans la même manière on a que $f(x)$ est strictement décroissante sur $]0, +\infty[$. Mais elle n'est pas monotone sur son domaine de définition maximal $\mathbb{R}^*$.

12. Le domaine de définition de g est $[-\frac{1}{2}, +\infty[$ car la racine carrée est définie seulement pour valeurs pas négatives de la variable. On peut montrer que g est injective en utilisant la définition de fonction injective. On suppose que $x_1, x_2 \geqslant -\frac{1}{2}$ ont la même image par g c.-à-d. $g(x_1) = g(x_2)$. Alors

$$\sqrt{2x_1 + 1} = \sqrt{2x_2 + 1},$$

en prenant le carré on trouve $x_1 = x_2$, donc g est injective. Montrons que l'image de g est $\mathbb{R}_+$. Soit $y \geqslant 0$. On veut montrer qu'on peut trouver $x \geqslant -\frac{1}{2}$ t.q. $g(x) = y$. Il faut donc résoudre l'équation

$$\sqrt{2x + 1} = y,$$

en prenant le carré on trouve $x = \frac{y^2 - 1}{2}$. On en conclut que la fonction

$$\begin{aligned} g : [-\frac{1}{2}, +\infty[&\to \mathbb{R}_+ \\ x &\mapsto g(x) \end{aligned}$$

est injective et surjective, donc bijective. La fonction réciproque est

$$\begin{aligned} g^{-1} : \mathbb{R}_+ &\to [-\frac{1}{2}, +\infty[\\ y &\mapsto g^{-1}(y) = \frac{y^2 - 1}{2}. \end{aligned}$$

14. e. $\frac{\pi}{3}$, f. $\frac{\pi}{4}$, g. Il faut juste vérifier que $\sqrt{2/5} \leqslant 1$, c'est-à-dire qu'il est dans le domaine de définition de arcsin. Par définition de fonction réciproque $\sin(\arcsin(y)) = y$.

15. a. Pendant le cours on a donné plusieurs versions de la définition de la limite, avec différents degrés de rigueur.

On dit que la fonction $1/x$ tend vers $1/2$ lorsque x tend vers 2 et on écrit

$$\lim_{x\to 2} \frac{1}{x} = \frac{1}{2}$$

si ...

1. La version plus intuitive mais qui n'a pas trop de sens mathématique (puisque on n'as pas défini le sens de "se rapproche") est la suivante :

   ... la valeur $1/x$ se rapproche de $1/2$ lorsque x se rapproche de 2.

2. D'une manière plus stricte on peut utiliser l'idée de "voisinage" : un voisinage U d'un point $x \in \mathbb{R}$ est un intervalle ouvert qui contient x. On dit alors :

   ... pour tout voisinage V de $\frac{1}{2}$ on peut trouver un voisinage U de x tel que pour tout point $x \neq 2$ et $x \neq 0$ de U on a que $\frac{1}{x}$ appartient à V.

3. On peut aussi donner les voisinage d'une façon explicite en utilisant des intervalles, par exemple $]\frac{1}{2} - \epsilon, \frac{1}{2} + \epsilon[$ est un voisinage de $\frac{1}{2}$ pour $\epsilon > 0$. Alors on trouve la version suivante :

   ... pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que pour tout $x \neq 2$, $x \neq 0$ et $2 - \delta < x < 2 + \delta$ on a que $\frac{1}{2} - \epsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} + \epsilon$.

4. Enfin on peut écrire la même chose en utilisant des symboles :

   ... $\forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \mid 2 - \delta < x < 2 + \delta, x \neq 0, x \neq 2 \implies \frac{1}{2} - \epsilon < \frac{1}{x} < \frac{1}{2} + \epsilon.$

Un problème différent est celui de montrer que la limite qu'on a écrit est vraie.

16. a. Non, car la limite à gauche et à droite sont différentes :

$$\lim_{x\to 1^{\pm}} \frac{1}{1-x} = \left[\frac{1}{0^{\mp}}\right] = \mp\infty.$$

b. Dans ce cas la limite existe et elle est égale à $+\infty$.

23. a. L'idée c'est d'utiliser le théorème des gendarmes. On peut assumer les inégalités

$$\sin(x) \leqslant x \leqslant \tan(x)$$

pour $0 \leqslant x \leqslant \pi/2$. On trouve

$$\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1,$$

qui est vérifiée pour $-\pi/2 \leqslant x \leqslant \pi/2$, avec $x \neq 0$. Donc par le théorème des gendarmes on a

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin(x)}{x} = 1.$$

c. 2, d. 2.