La limite

1 Définition de la limite

1.1 Introduction

On commence par une définition intuitive de la limite finie d'une fonction en un point.

Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et f une fonction réelle définie sur $I \setminus \{x_0\}$. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ (ou admet ℓ comme limite) quand x tend vers x_0, et on note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell,$$

si $\boxed{f(x) \text{ se rapproche de } \ell \text{ quand } x \in I \setminus \{x_0\} \text{ se rapproche de } x_0.}$

Une façon plus précise d'exprimer cette idée est :

> *pour tout intervalle V arbitrairement petit qui contient ℓ un peut trouver un suffisamment petit intervalle U qui contient x_0 tel que pour tous les x dans U et dans le domaine de définition $I \setminus \{x_0\}$ de f on a que l'image $f(x)$ est dans V.*

En choisissant l'intervalle V de la forme $]\ell - \epsilon, \ell + \epsilon[$ et l'intervalle U de la forme $]x_0 - \delta, x_0 + \delta[$, on trouve la condition usuelle avec ϵ, δ :

> *pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que si $0 < |x - x_0| < \delta$ et $x \in I$ alors $|f(x) - \ell| < \epsilon$.*

On peut la écrire aussi dans la façon suivante :

$$\boxed{\forall \epsilon > 0 \ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } 0 < |x - x_0| < \delta, x \in I \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.}$$

Remarque. Il n'est pas nécessaire que f soit définie au point x_0, et même si f est définie au point x_0, la limite en x_0 ne dépend pas de la valeur $f(x_0)$.

De la même manière on peut donner les définitions de la limite pour les 25 cas suivants :

	finies	finies à dr. ou à g.	infinies
en un point	$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell$	$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^{\pm}$	$\lim_{x \to x_0} f(x) = \pm\infty$
" à droite	$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell$	$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell^{\pm}$	$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \pm\infty$
" à gauche	$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell$	$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell^{\pm}$	$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$
en l'infini	$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell$	$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell^{\pm}$	$\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \pm\infty$

1.2 Limite en un point

Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et f une fonction réelle définie sur $I \setminus \{x_0\}$.

Définition 1. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0, et on note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell,$$

si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in I \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$.

Définition 2. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0, et on note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = +\infty,$$

si pour tout $A > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in I \implies f(x) > A$.

Définition 3. On dit que f tend vers $-\infty$ quand x tend vers x_0, et on note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = -\infty,$$

si pour tout $A > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta$, $x \in I \implies f(x) < -A$.

Example. On va montrer que la fonction x^3 tend vers 0 quand x tend vers 0 en utilisant la définition. On a :

$$\lim_{x \to 0} x^3 = 0 \iff \forall \epsilon > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } 0 < |x| < \delta \implies |x^3| < \epsilon.$$

Soit $\epsilon > 0$. On a que $|x^3| < \epsilon$ si et seulement si $|x| < \epsilon^{\frac{1}{3}}$. Donc, si on prend $\delta = \epsilon^{\frac{1}{3}}$ alors $|x| < \delta = \epsilon^{\frac{1}{3}} \implies |x^3| < \epsilon$. On a montré la limite.

Exercice. Montrer que : $\lim_{x \to x_0} c = c$, $\lim_{x \to x_0} x = x_0$, $\lim_{x \to 0} x^2 = 0$, $\lim_{x \to 0} \frac{1}{x^2} = +\infty$.

1.3 Limites à droite et à gauche

Soit f une fonction réelle définie sur $I =]x_0, b[$.

Définition 4. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 à droite, et on note

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = \ell,$$

si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $x_0 < x < x_0 + \delta$, $x \in I \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$.

Définition 5. On dit que f tend vers $+\infty$ quand x tend vers x_0 à droite, et on note

$$\lim_{x \to x_0^+} f(x) = +\infty,$$

si pour tout $A > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $x_0 < x < x_0 + \delta$, $x \in I \implies f(x) > A$.

Exercice. Écrire la définition de $\lim_{x \to x_0^+} f(x) = -\infty$.

Soit f une fonction réelle définie sur $I =]a, x_0[$.

Définition 6. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0 à gauche, et on note

$$\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \ell,$$

si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $x_0 - \delta < x < x_0$, $x \in I \implies |f(x) - \ell| < \epsilon$.

Exercice. Écrire les définitions de $\lim_{x \to x_0^-} f(x) = \pm\infty$.

Proposition 7. *Une fonction réelle f admet limite $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ quand x tend vers x_0 si et seulement si elle admet limites à droite et à gauche égales à ℓ quand x tend vers x_0.*

Example. La fonction $H : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ définie par

$$H(x) = \begin{cases} 1 & x \geqslant 0, \\ 0 & x < 0, \end{cases}$$

a limites à gauche et à droite différents en 0 :

$$\lim_{x \to 0^+} H(x) = 1, \qquad \lim_{x \to 0^-} H(x) = 0.$$

Donc, pour la Proposition précédente, la limite quand x tend vers 0 n'existe pas.

Example. On va montrer, en utilisant la définition, que

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty.$$

La définition de la limite en ce cas est la suivante :

$$\lim_{x \to 0^+} \frac{1}{x} = +\infty \iff \forall A > 0\ \exists \delta > 0 \text{ t.q. } 0 < x < \delta \implies \frac{1}{x} > A.$$

Soit $A > 0$. Si on prend $\delta = \frac{1}{A}$, pour tout x tel que $0 < x < \delta = \frac{1}{A}$ on a que $\frac{1}{x} > A$, donc on a montré la limite.

Exercice. Montrer, en utilisant la définition, que

$$\lim_{x \to 0^-} \frac{1}{x} = -\infty.$$

Remarque. Par la Proposition 7, puisque les limites de la fonction $\frac{1}{x}$ quand x tend vers $0^\pm$ à droite et à gauche sont différentes, alors sa limite quand x tend vers 0 n'existe pas.

1.4 Limites en l'infini

Soit f une fonction réelle définie sur $I =]a, +\infty[$.

Définition 8. On dit que f tend vers $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers $+\infty$ et on note

$$\lim_{x \to +\infty} f(x) = \ell$$

si :

$$\forall \epsilon > 0\ \exists A > 0 \text{ t.q. } x > A \text{ et } x \in I \implies |f(x) - \ell| < \epsilon.$$

Exercice. Écrire toutes les définitions de limite vers $\ell \in \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ quand x tend vers $\pm\infty$.

1.5 Limites vers $\ell^\pm$

Souvent, notamment dans les opérations avec les limites, il faut savoir si la fonction $f(x)$ se rapproche de sa limite ℓ à droite ou à gauche, c.-à-d. par les valeurs supérieures ou inférieures à ℓ.

Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$ et f une fonction réelle définie sur $I \setminus \{x_0\}$.

Définition 9. On dit que f tend vers ℓ^+ où $\ell \in \mathbb{R}$ quand x tend vers x_0, et on note

$$\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^+,$$

si pour tout $\epsilon > 0$ il existe $\delta > 0$ tel que $0 < |x - x_0| < \delta,\ x \in I \implies \ell \leqslant f(x) < \ell + \epsilon$.

Exercice. Écrire les définitions de $\lim_{x \to x_0} f(x) = \ell^-$, $\lim_{x \to x_0^\pm} f(x) = \ell^\pm$ et $\lim_{x \to \pm\infty} f(x) = \ell^\pm$.

1.6 Unicité de la limite

Théorème 10 (Unicité de la limite)**.** *Si une fonction admet une limite, alors elle est unique.*

Remarque. L'énoncé reste valide si on parle de limites finies ou infinies, en un point, à droite, à gauche ou à l'infini.

2 Limites et opérations

Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, f et g fonctions réelles définies sur $I \setminus \{x_0\}$.

Proposition 11. *Si f et g admettent limites finies $\lim_{x\to x_0} f(x) = \ell$ et $\lim_{x\to x_0} g(x) = k$, alors :*

1. $\lim_{x\to x_0}(f(x)+g(x)) = \ell + k$,
2. $\lim_{x\to x_0} f(x)g(x) = \ell k$,
3. *si $f(x) \neq 0$ pour $x \in I \setminus \{x_0\}$ et si $\ell \neq 0$ alors $\lim_{x\to x_0} \frac{1}{f(x)} = \frac{1}{\ell}$.*

Remarque. La proposition reste vraie même si les limites sont infinies ou zero, si on utilise les conventions suivantes :

1. $(+\infty) + (+\infty) = +\infty, \quad (-\infty) + (-\infty) = -\infty$,
   si $a \in \mathbb{R}$, alors $a + (+\infty) = +\infty$, $a + (-\infty) = -\infty$,
2. $(+\infty) \times (+\infty) = +\infty$, $(+\infty) \times (-\infty) = -\infty$, $(-\infty) \times (-\infty) = +\infty$,
   si $a > 0$, alors $a \times (+\infty) = +\infty$, $a \times (-\infty) = -\infty$,
   si $a < 0$, alors $a \times (+\infty) = -\infty$, $a \times (-\infty) = +\infty$,
3. $\frac{1}{0^+} = +\infty$, $\frac{1}{0^-} = -\infty$, $\frac{1}{+\infty} = 0^+$, $\frac{1}{-\infty} = 0^-$.

Dans les cas $\infty - \infty$, $0 \times \infty$, $0/0$, ∞/∞ on ne peut rien dire sur le résultat, on les appelle les formes indéterminées.

Remarque. La proposition reste valide si on parle de limite à droite, à gauche ou à l'infini.

Example. La limite de la fonction rationnelle

$$f(x) = \frac{x^2 - 3x + 2}{x^2 - 1}$$

quand x tend vers 1 est un exemple de forme indéterminée $0/0$. En ce cas on peut simplifier en factorisant le numérateur et le dénominateur :

$$f(x) = \frac{(x-1)(x-2)}{(x-1)(x+1)} = \frac{x-2}{x+1}$$

donc la limite est égale à $-\frac{1}{2}$.

3 Limites et inégalités

Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, f et g fonctions réelles définies sur $I \setminus \{x_0\}$.

Théorème 12. *Si $f(x) \leqslant g(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ et les limites de f et g quand x tend vers x_0 existent, alors*

$$\lim_{x\to x_0} f(x) \leqslant \lim_{x\to x_0} g(x).$$

Remarque. L'énoncé reste valide si on parle de limite à droite, à gauche, à l'infini, et se la limite est finie ou infinie. Au cas où $f(x)$ tend vers $+\infty$ alors la limite de $g(x)$ existe et est égale à $+\infty$. Au cas où $g(x)$ tend vers $-\infty$ alors la limite de $f(x)$ existe et est égale à $-\infty$.

Example. On a que $e^x > x$ pour $x \geqslant 0$. On sait que $\lim_{x\to+\infty} x = +\infty$ donc $\lim_{x\to+\infty} e^x = +\infty$

Remarque. Même si l'inégalité dans l'hypothèse est stricte $f(x) < g(x)$, dans la thèse on ne peut pas remplacer l'inégalité faible avec une inégalité stricte.

Example. Les fonctions $1/x$ et $-1/x$ satisfont une inégalité stricte mais leurs limites quand x tend vers $+\infty$ sont égales à 0.

Soient I un intervalle ouvert, $x_0 \in I$, f, g et h fonctions réelles définies sur $I \setminus \{x_0\}$.

Théorème 13 (des gendarmes)**.** *Si $f(x) \leqslant g(x) \leqslant h(x)$ pour tout $x \in I \setminus \{x_0\}$ et $\lim_{x\to x_0} f(x) = \lim_{x\to x_0} h(x) = \ell$, alors la limite de g quand x tend vers x_0 existe et est égale à ℓ.*

Remarque. L'énoncé reste valide si on parle de limite à droite, à gauche, à l'infini.

Example. La limite de $\frac{\sin}{x}$ quand x tend vers 0 est un exemple de forme indéterminée 0/0. On peut utiliser le théorème des gendarmes pour montrer que :

$$\lim_{x\to 0} \frac{\sin x}{x} = 1.$$

À partir des définitions géométriques on a que $|\sin(x)| \leqslant |x| \leqslant |\tan(x)|$ si $x \in]-\pi/2, \pi/2[$. Si x n'est pas nul, on peut donc écrire : $|\cos(x)| \leqslant \left|\frac{\sin(x)}{x}\right| \leqslant 1$ et, comme toutes ces fonctions sont positives, que $\cos(x) \leqslant \frac{\sin(x)}{x} \leqslant 1$. Par le théorème des gendarmes on peut conclure.